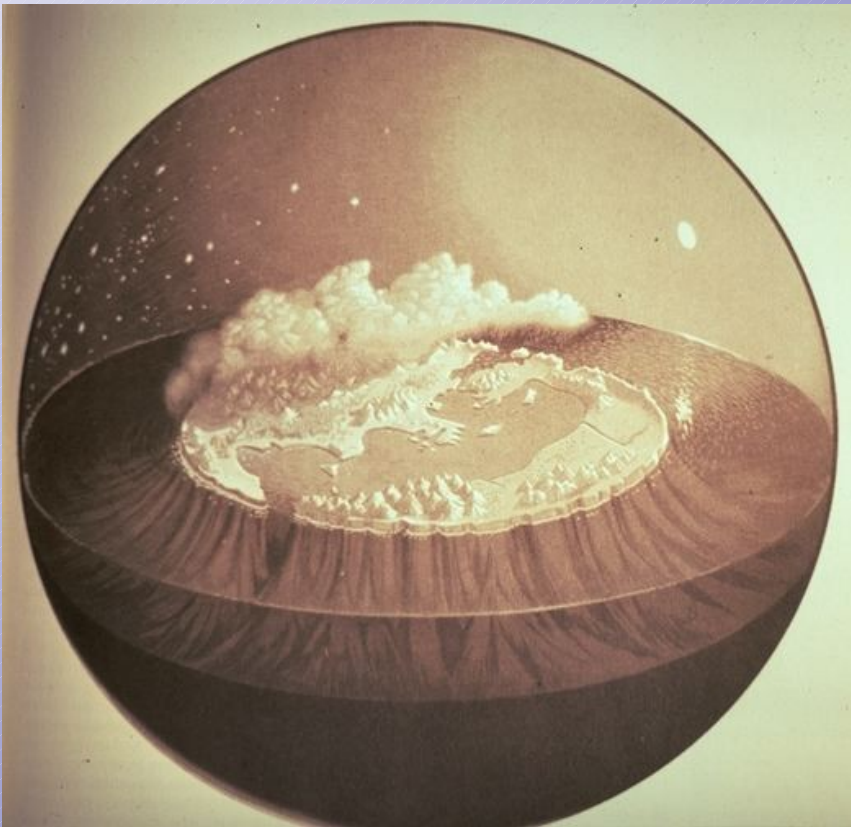




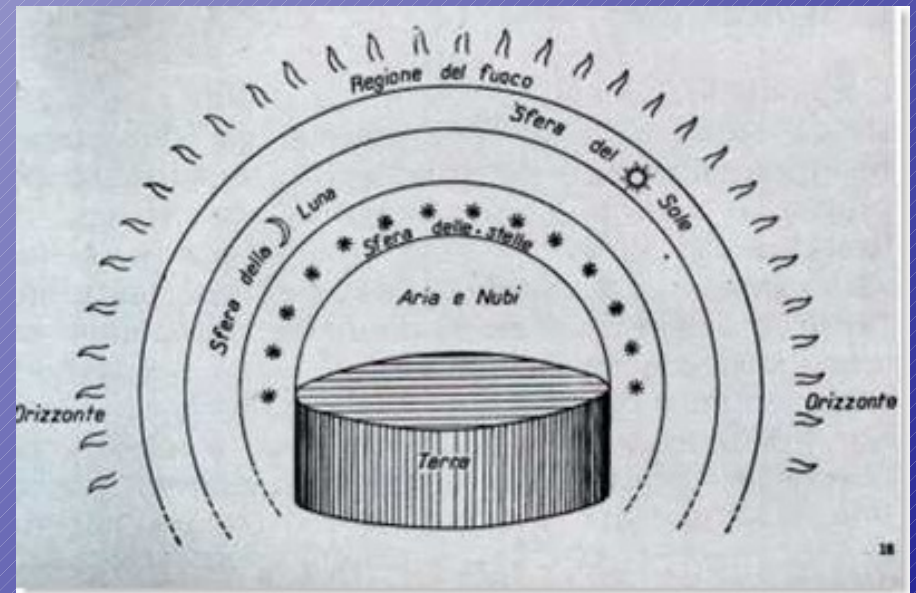




Ma cosa si pensava della forma della terra prima delle fotografie?



Omero (VIII sec. a.C.?)

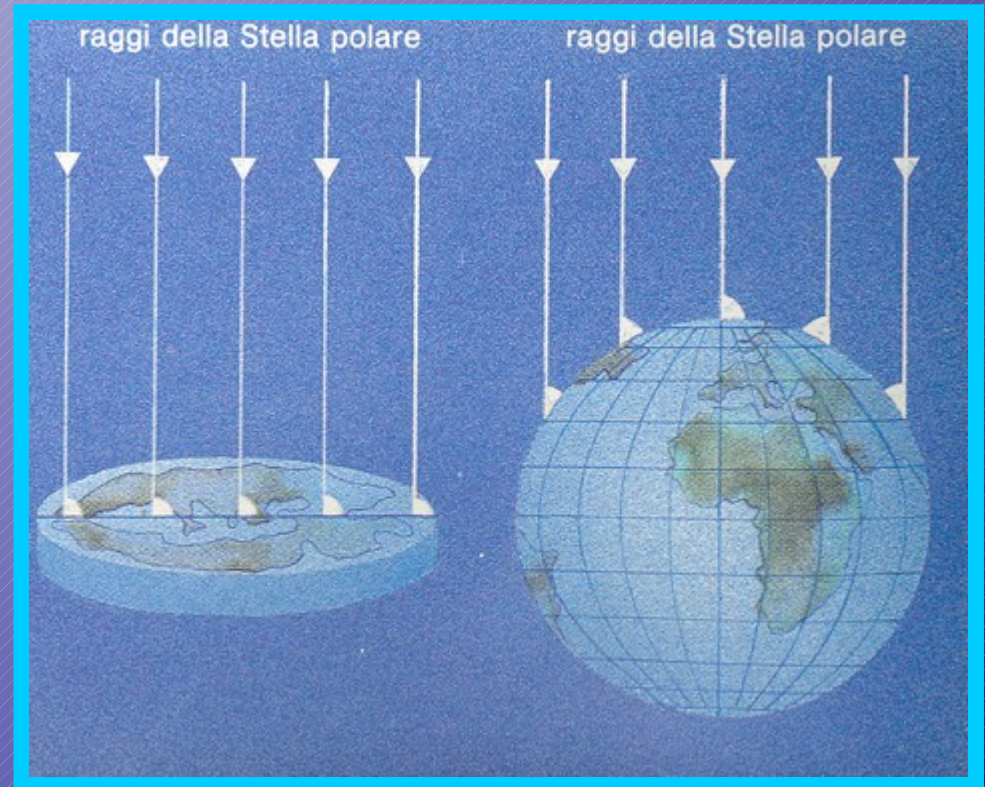


Anassimandro (IV sec. a.C.)

Aristotele (384-322 a.C.) riportava due osservazioni a riprova della sfericità della terra:



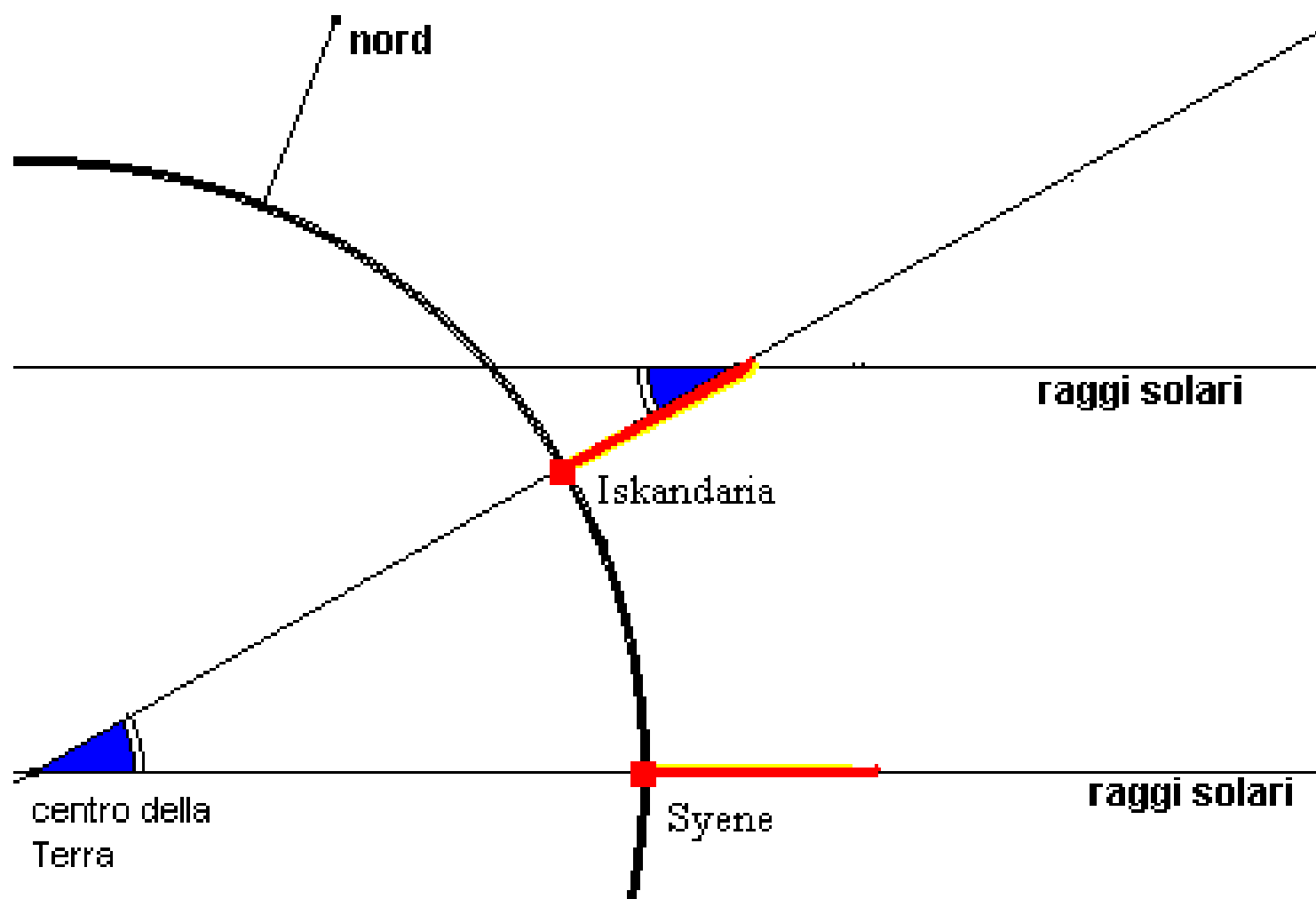
Eclissi di luna



Inclinazione raggi delle
stelle

**Senza l'aiuto di elementi esterni, solo
con misurazioni sulla terra, possiamo
scoprire che non viviamo su di un
mondo piano?**







Per costruire una carta geografica dobbiamo trovare una ***proiezione***, cioè una corrispondenza che associa ad un punto P sulla terra un punto P' sul piano.

La richiesta più intuitiva che possiamo fare a questa corrispondenza è che conservi le distanze, cioè

$$d_{sfera}(P,Q)=d_{piano}(P',Q')$$

Ma allora quanto sarebbe grande questa carta geografica!!!??!

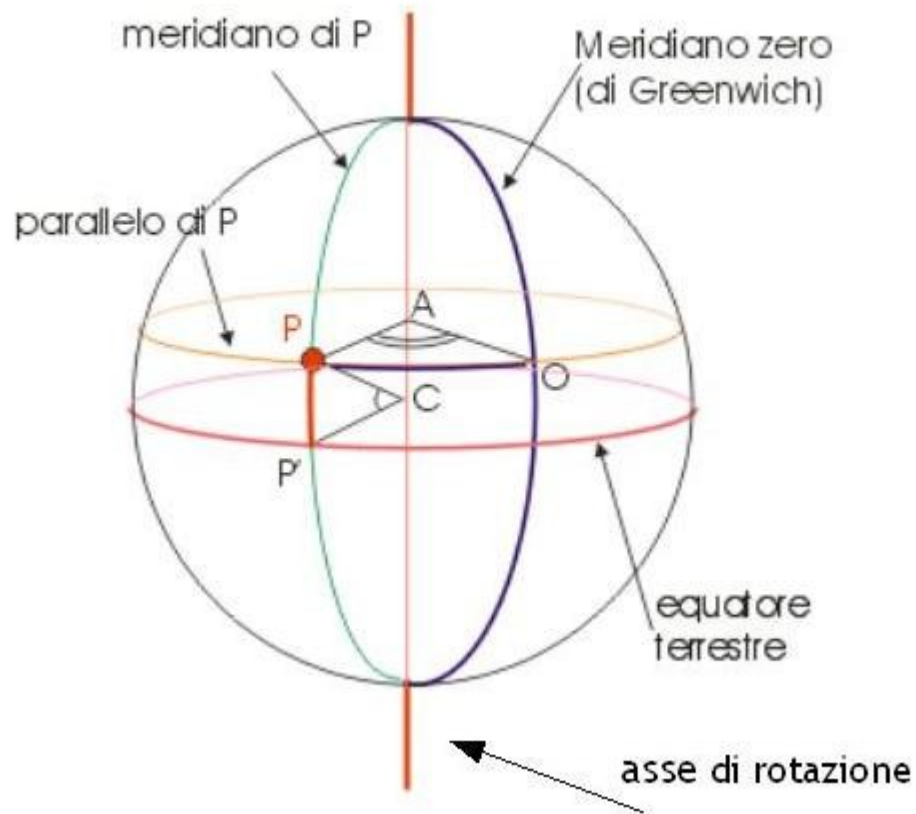
Se chiamiamo *scala* rispetto a P e Q il rapporto:

$$d_{sfera}(P,Q)/d_{piano}(P',Q')$$

una richiesta più ragionevole è che tale rapporto sia costante, cioè non dipenda dai punti P e Q sulla terra.

In tal caso il rapporto è detto *scala* della proiezione.

Le coordinate geografiche



Longitudine del punto P:
angolo $\widehat{PAO}$
Latitudine del punto P:
angolo $\widehat{PCP'}$

Sono misurate in gradi e frazioni di grado.

La latitudine varia da -90° (polo sud) a $+90^\circ$ (polo nord).

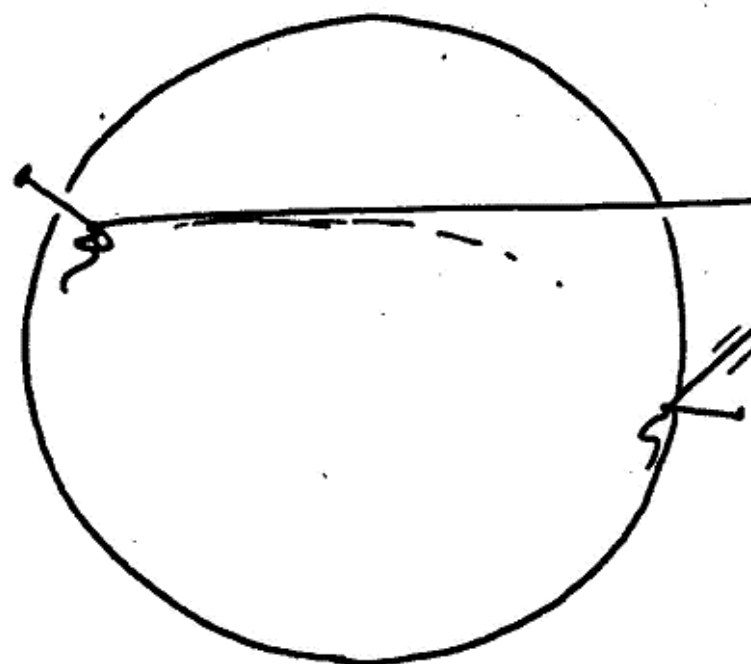
I punti sull'equatore hanno latitudine 0° .

La longitudine può essere EST o OVEST e varia da 0° (meridiano di Greenwich) a 180° (linea del cambiamento di data) E o O.

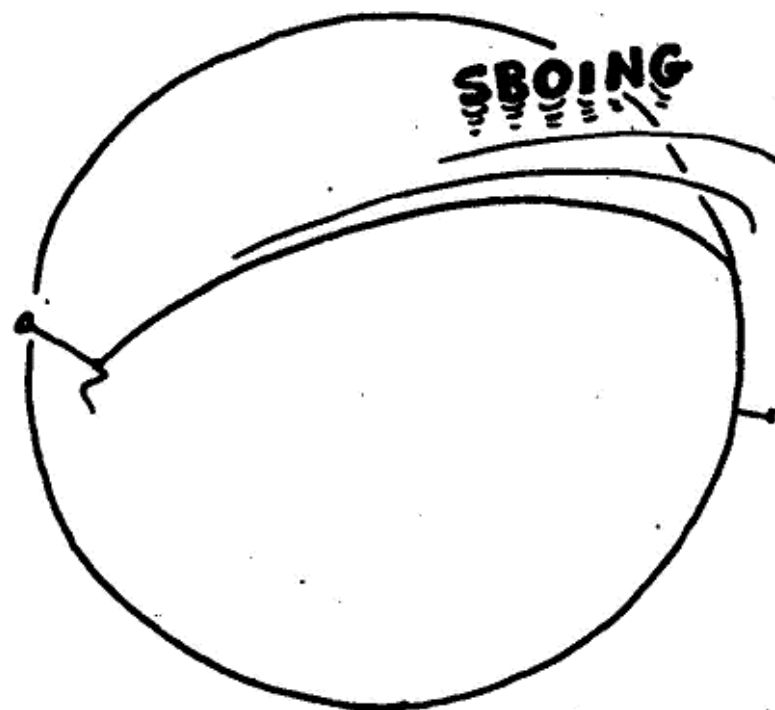
Per il polo nord ed il polo sud la longitudine non è definita.



Su di un piano
sappiamo
misurare la distanza
tra due punti.



TENDETE UN ELA-
STICO TRA DUE PUN-
TI DI UNA SFERA.



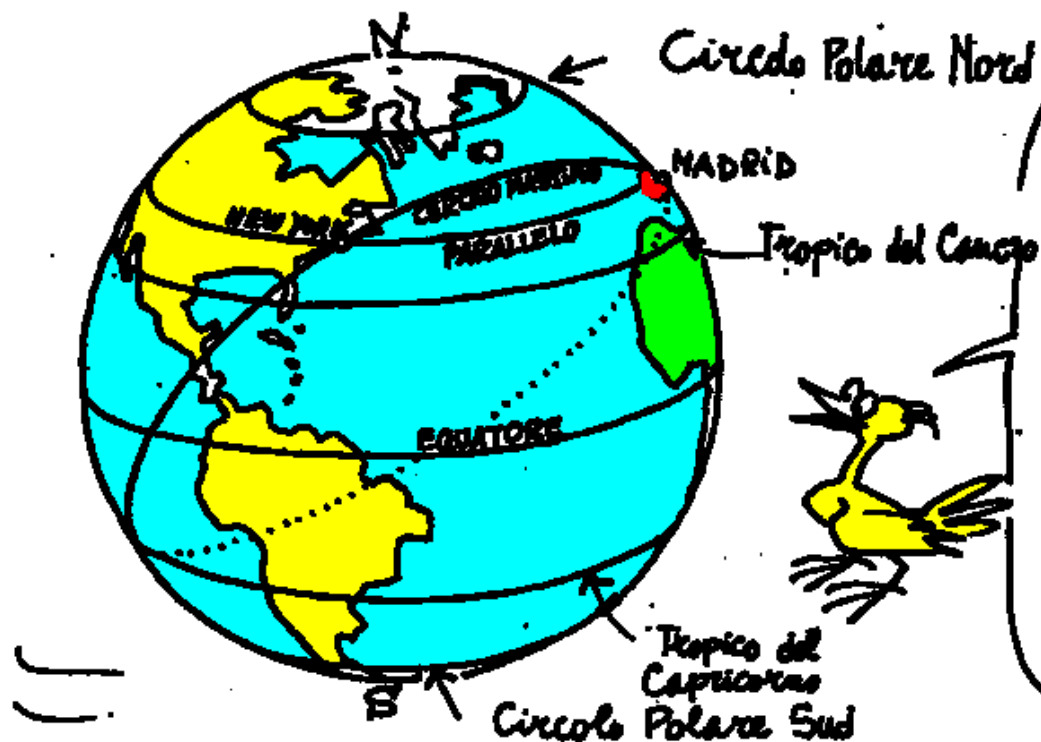
SBOING



LASCIATELO!

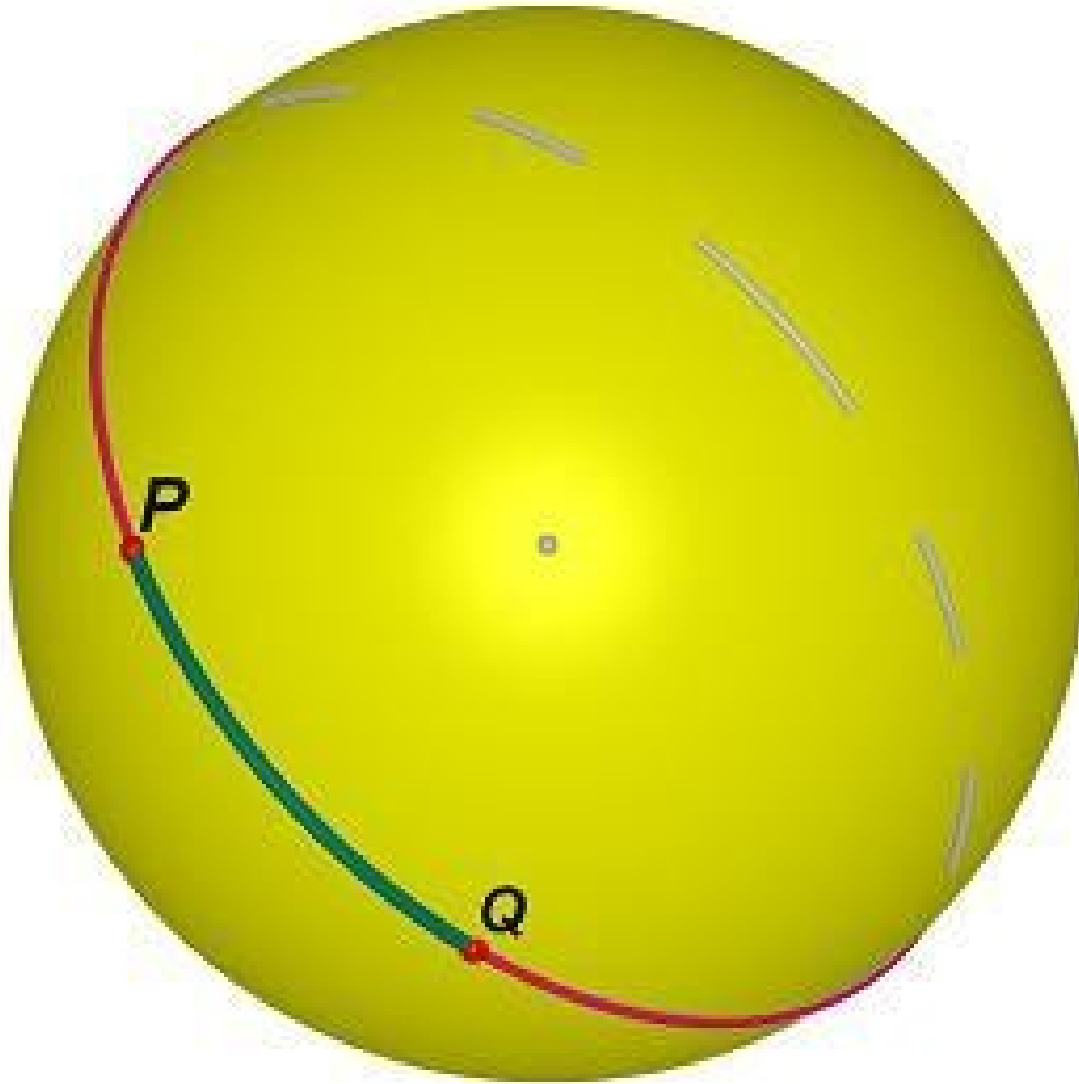


Attenzione!!!

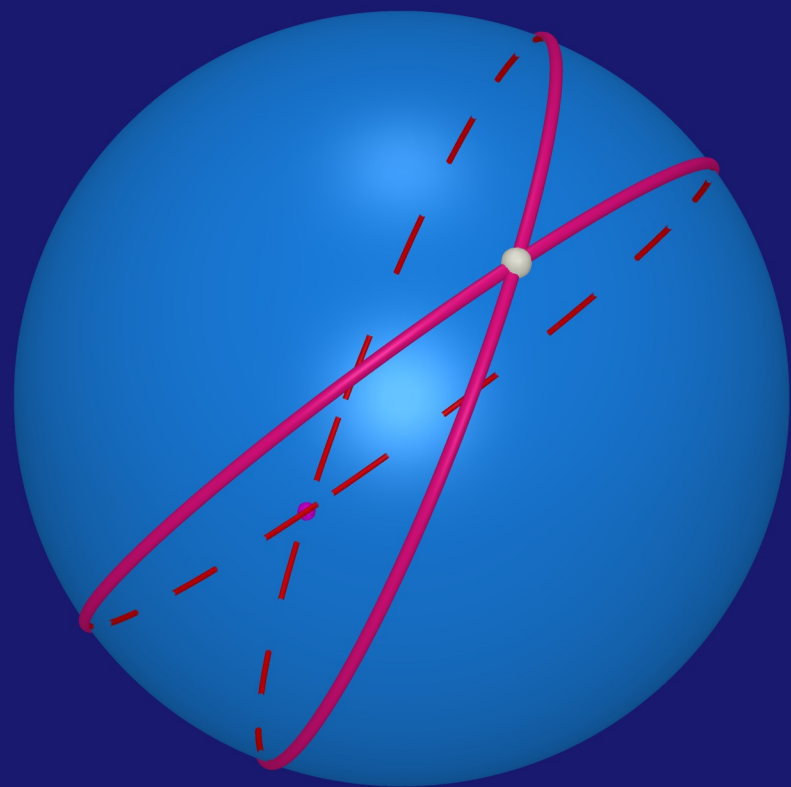


SUL PIANETA TERRA I CIRCOLI POLARI, I TROPICI, SONO PARALLELI. MADRID E NEW YORK SI TROVANO SULLO STESSO PARALLELO. MA E' BEN NOTO CHE QUESTO ARCO DI PARALLELO CHE LE UNISCE NON E' LA LINEA PIU' BREVE, MENTRE LO E' IL CERCHIO MASSIMO!

E sulla sfera?



$d_{sfera}(P,Q)=$
lunghezza del
più piccolo
arco di cerchio
massimo
congiungente P
e Q.



Consideriamo una qualsiasi superficie Σ (cono, cilindro, toro,...). Come possiamo definire su Σ delle linee che equivalgono alle rette del piano?

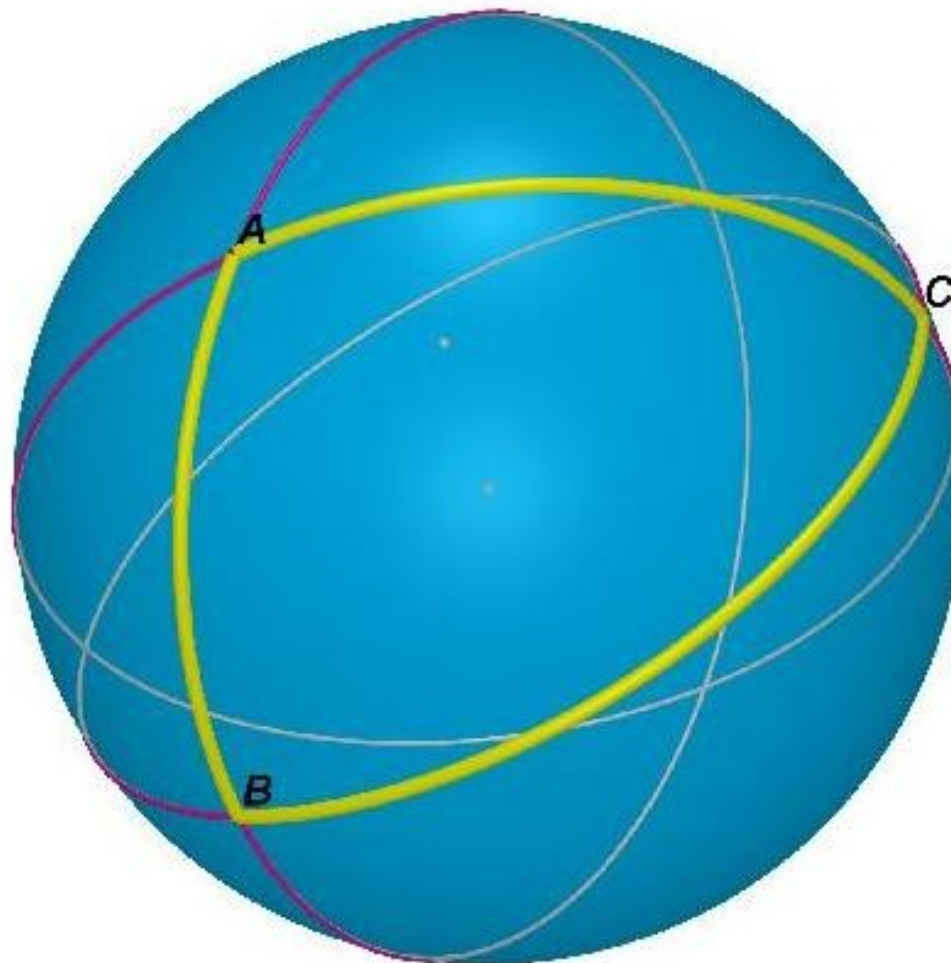
Definizione: Diremo che una curva γ tracciata sulla superficie Σ è una **geodetica** se ogni arco *non troppo lungo* di γ , i cui estremi siano i punti A e B, è il percorso più breve da A a B tra quelli tracciabili su Σ .

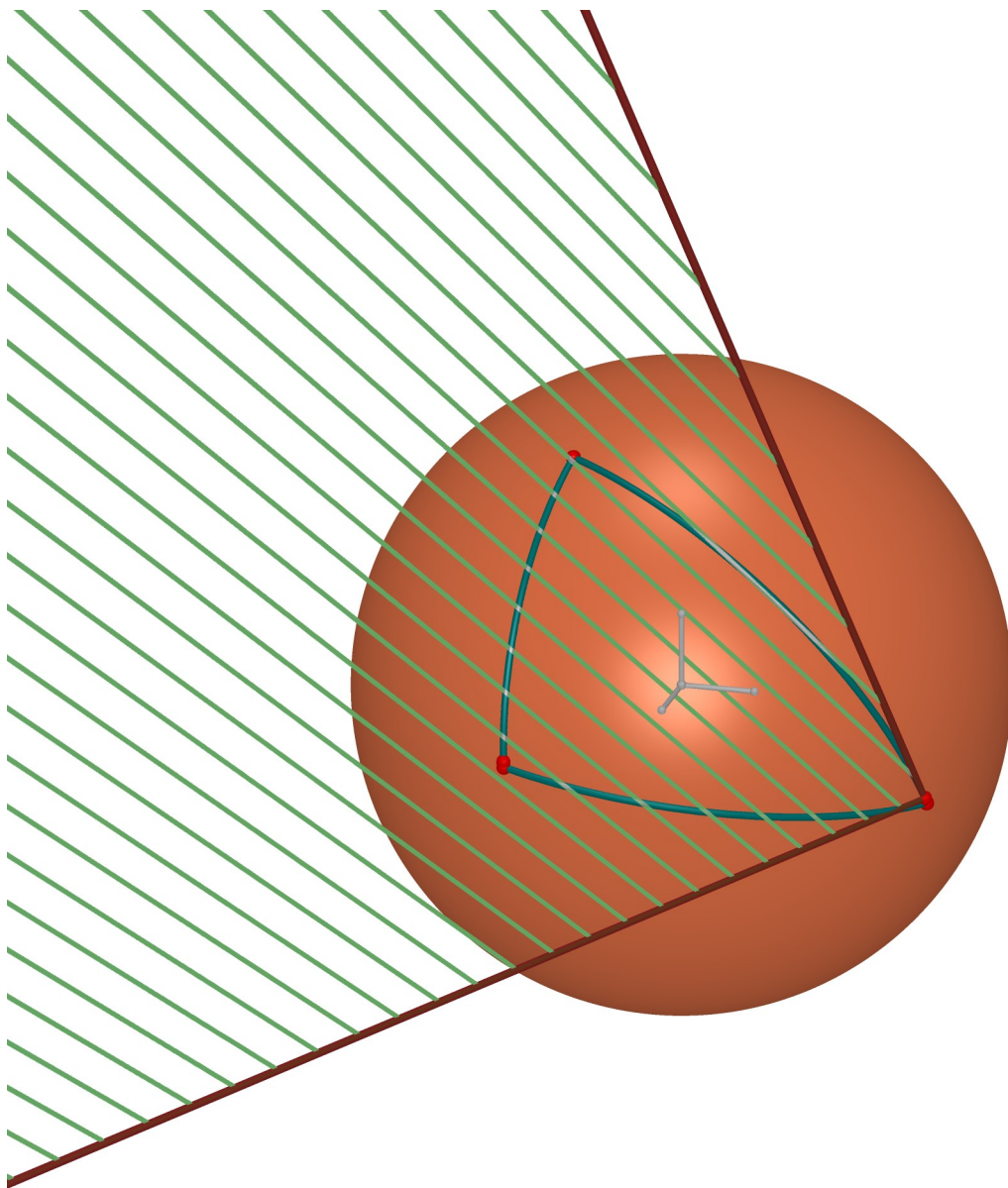
Piano -----> Rette

Sfera -----> Circonferenze massime

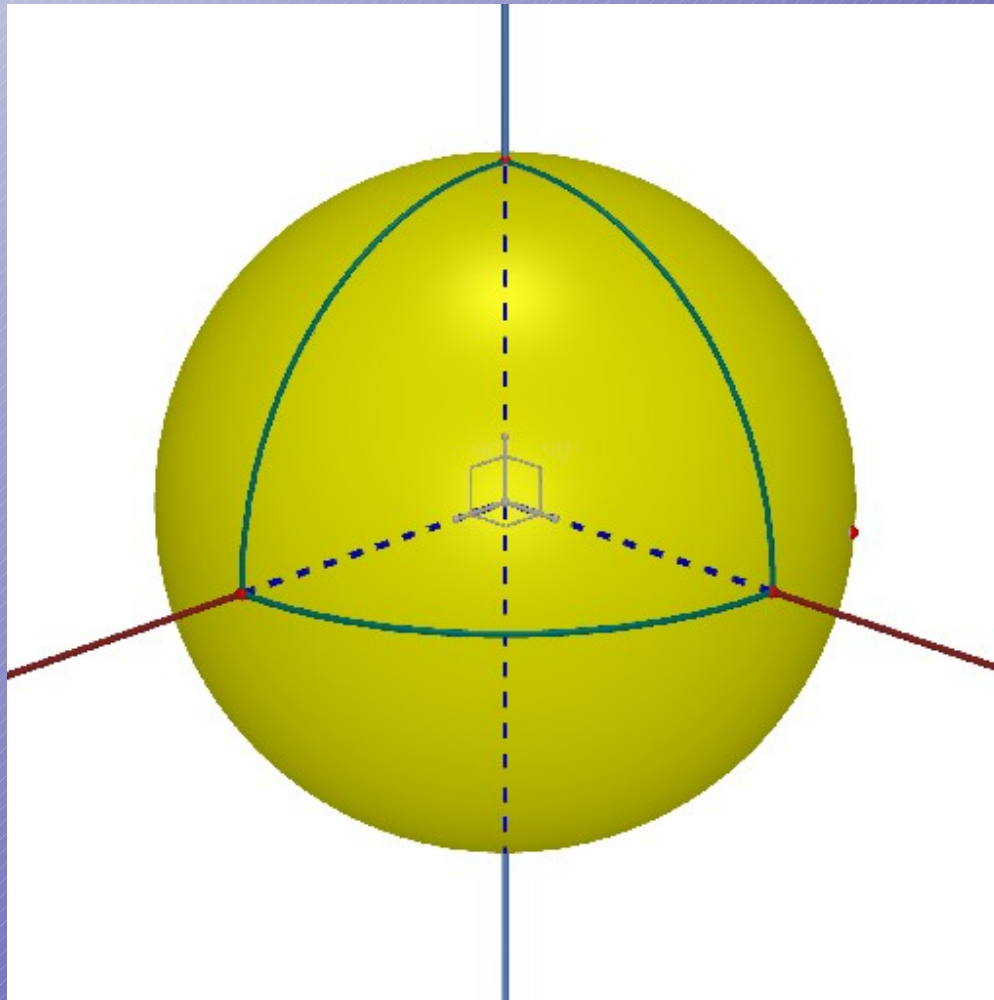
Sul cilindro?

I triangoli sferici





Ci sono triangoli con tre angoli retti!!!

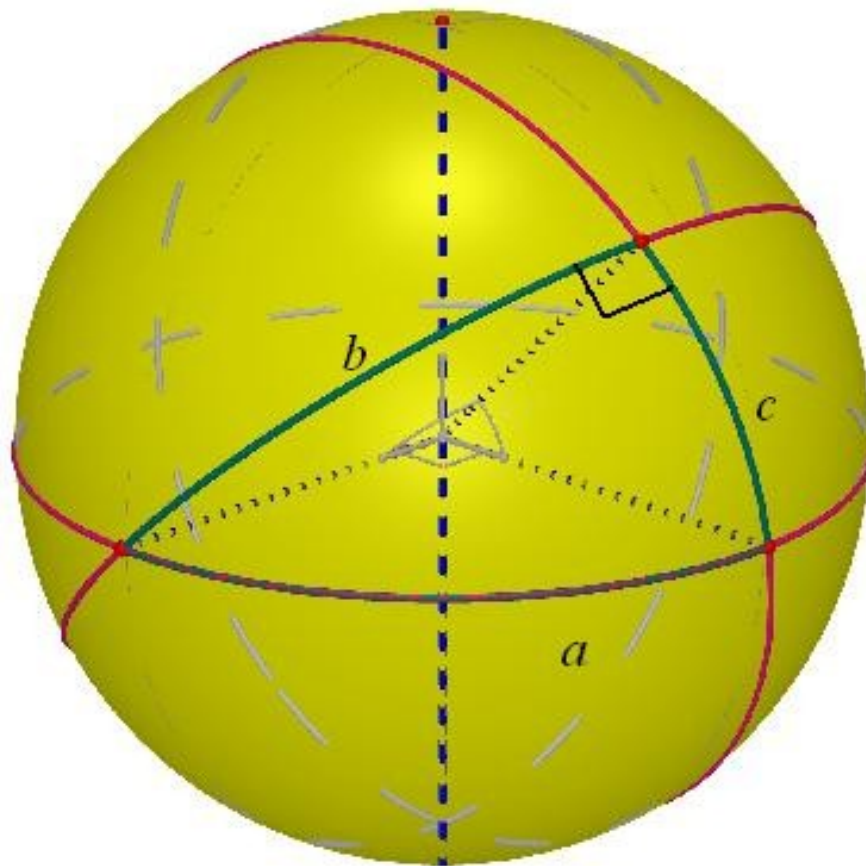


Criteri di uguaglianza per i triangoli sferici

Su una sfera sono uguali due triangoli sferici che abbiano ordinatamente uguali

- 1) due lati e l'angolo compreso
- 2) due angoli e il lato comune
- 3) i tre lati
- 4) i tre angoli.

E il teorema di Pitagora?



$$a^2 < b^2 + c^2$$





Il primo libro degli Elementi di Euclide si apre con 23 definizioni, degli Assiomi (o nozioni comuni) e 5 postulati

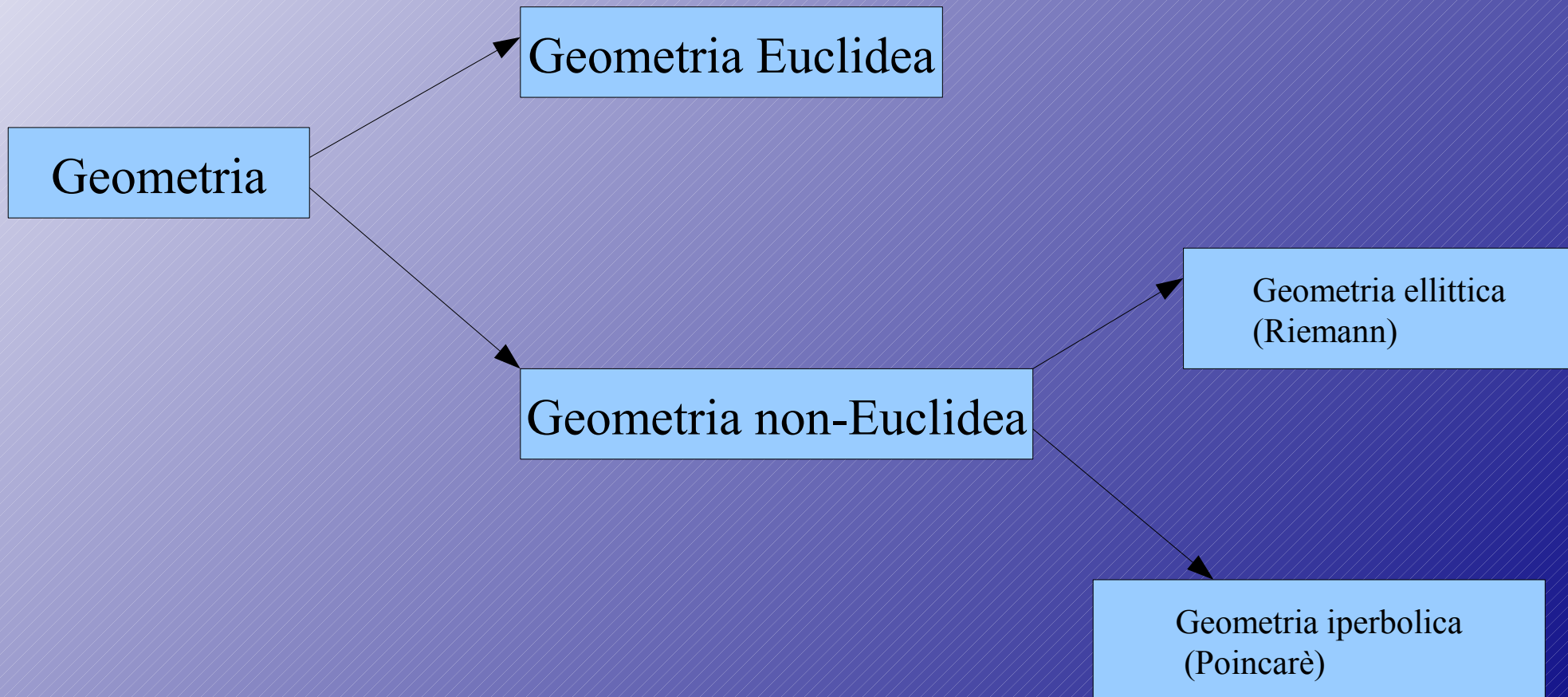
Assiomi

- I. Due cose uguali ad una terza sono uguali tra di loro.*
- II. Se a cose uguali si aggiungono cose uguali, allora si ottengono cose uguali.*
- III. Se da cose uguali si tolgono cose uguali, allora si ottengono cose uguali.*
- IV. Cose che possono essere portate a sovrapporsi l'una all'altra sono uguali tra loro...*

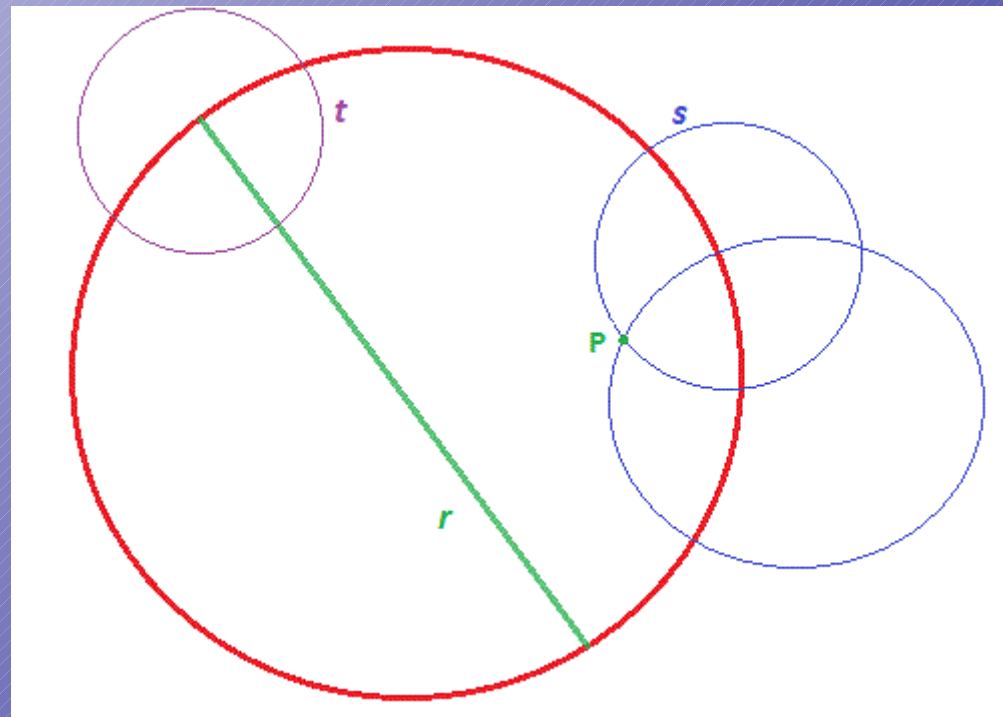
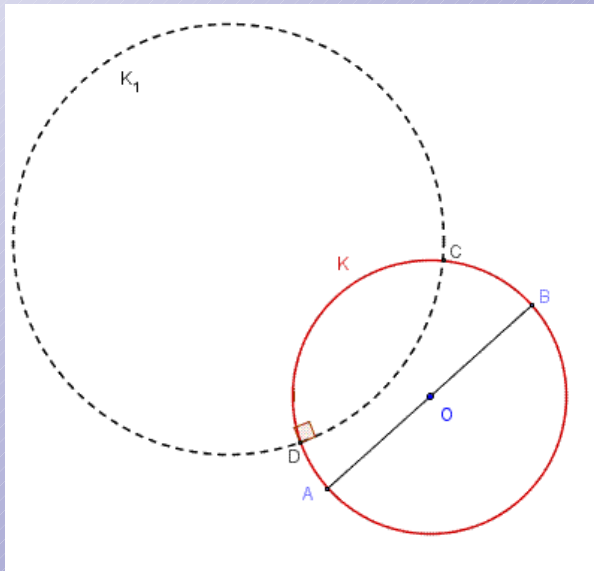
Postulati

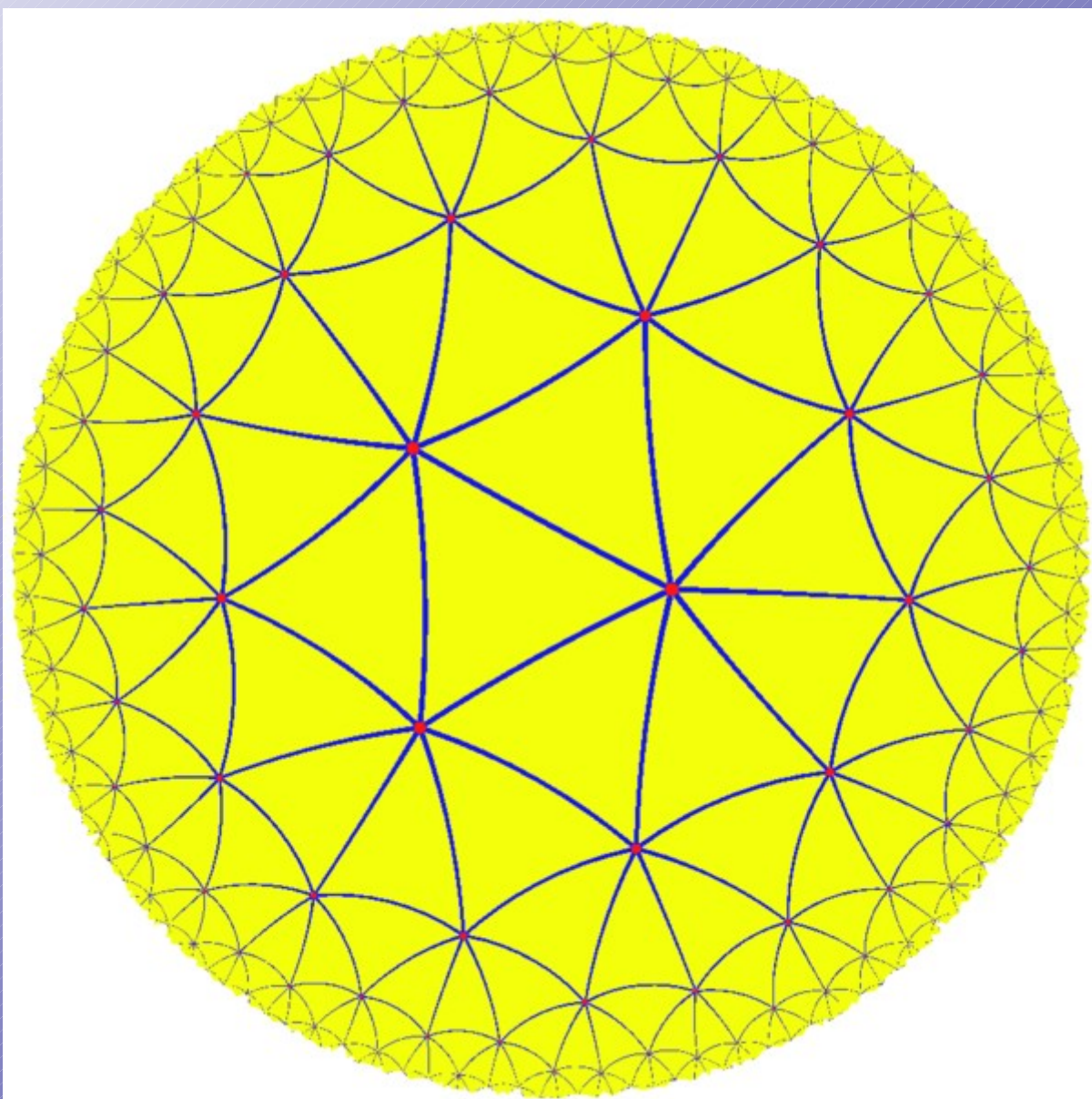
- I. Da un punto ad ogni altro punto è possibile condurre una linea retta.*
- II. Un segmento di linea retta può essere indefinitamente prolungato in linea retta.*
- III. Con centro e raggio scelti a piacere è possibile tracciare una circonferenza.*
- IV. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro.*
- V. Se una retta, incontrandone altre due, forma con esse angoli interni da una stessa parte la cui somma è minore di due retti, queste due rette, prolungate all'infinito, si incontrano dalla parte in cui giacciono tali angoli.*

Il V postulato si può esprimere in forma diversa da quella proposta da Euclide stesso; è detto **postulato delle parallele**: *data una retta ed un punto fuori di essa, per questo punto passa una ed una sola retta parallela alla retta data.*



Disco di Poincaré







Chiamiamo **eccesso sferico** di un triangolo sferico

$$A_1 A_2 A_3$$

$$\varepsilon = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 - \pi$$

(gli angoli sono misurati in radianti!)

Teorema di Girard (1625). L'area di un triangolo sferico T uguaglia il prodotto dell'eccesso sferico per il quadrato del raggio della sfera

$$A(T) = \varepsilon r^2$$

Dunque la somma degli angoli dipende dall'area del triangolo e viceversa!!

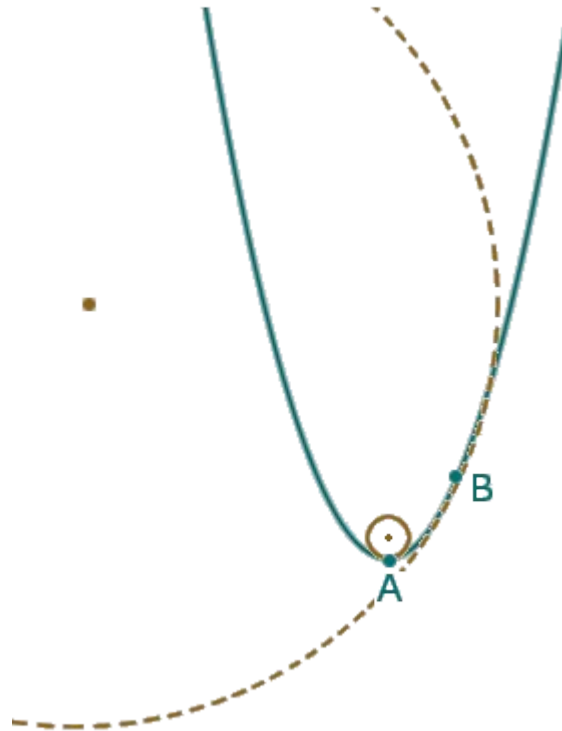
Leggiamo la formula in altro modo:

$$\varepsilon / A(T) = 1/r^2$$

$1/r^2$: *curvatura della sfera.*

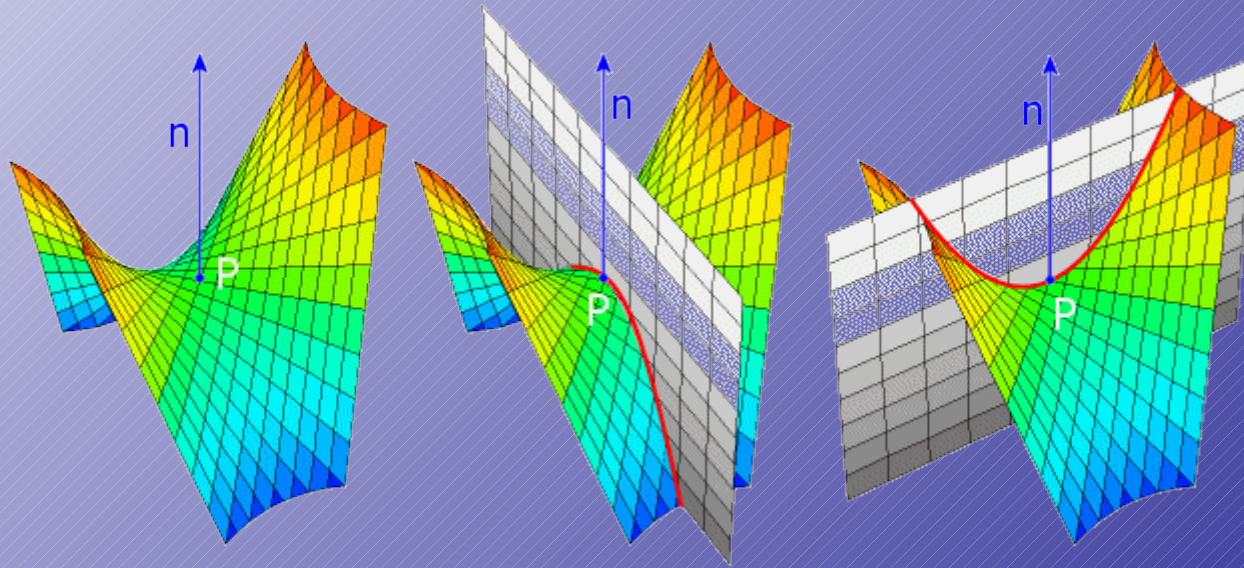
Al diminuire del raggio aumenta la curvatura!

Curvatura di una curva piana

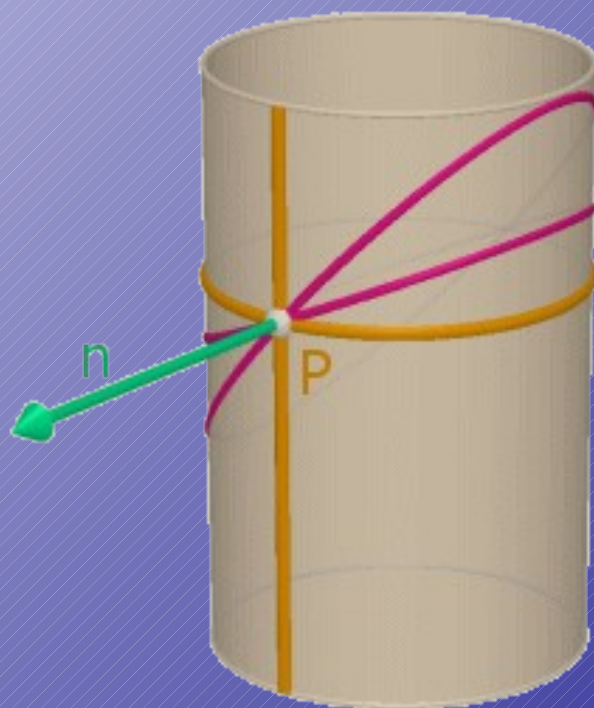


$$\text{Curvatura} = 1/R$$

Curvatura Gaussiana di una superficie



$$K = k_{\max} k_{\min}$$



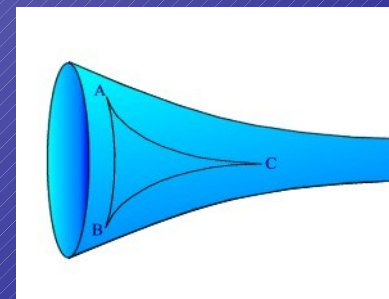
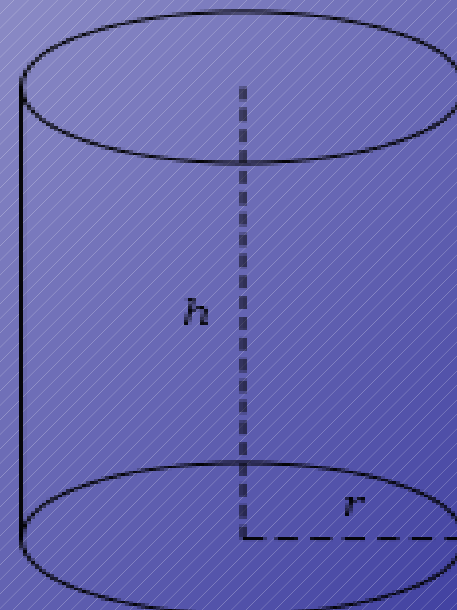
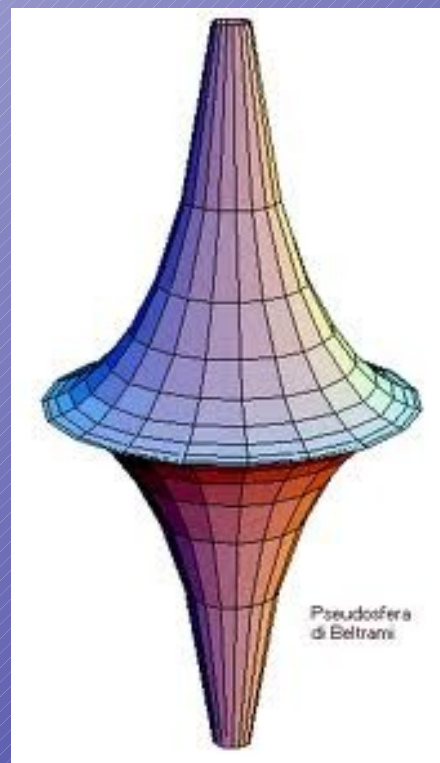
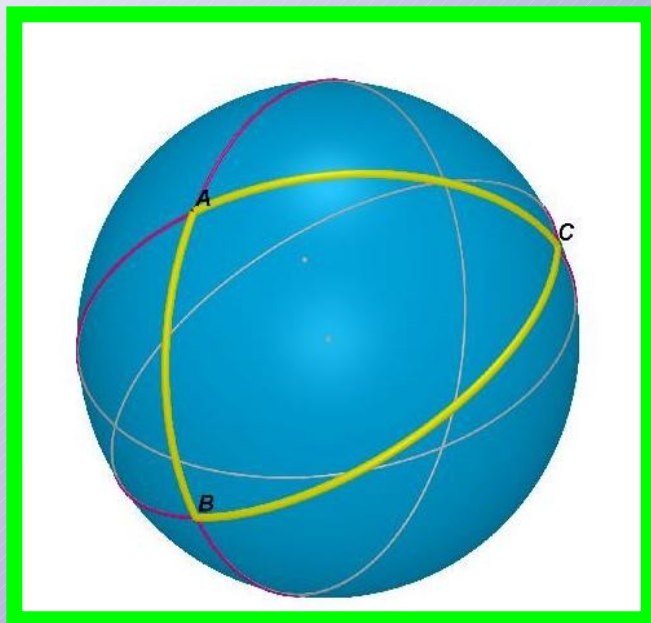
Theorema elegantissimum (Gauss, 1827)

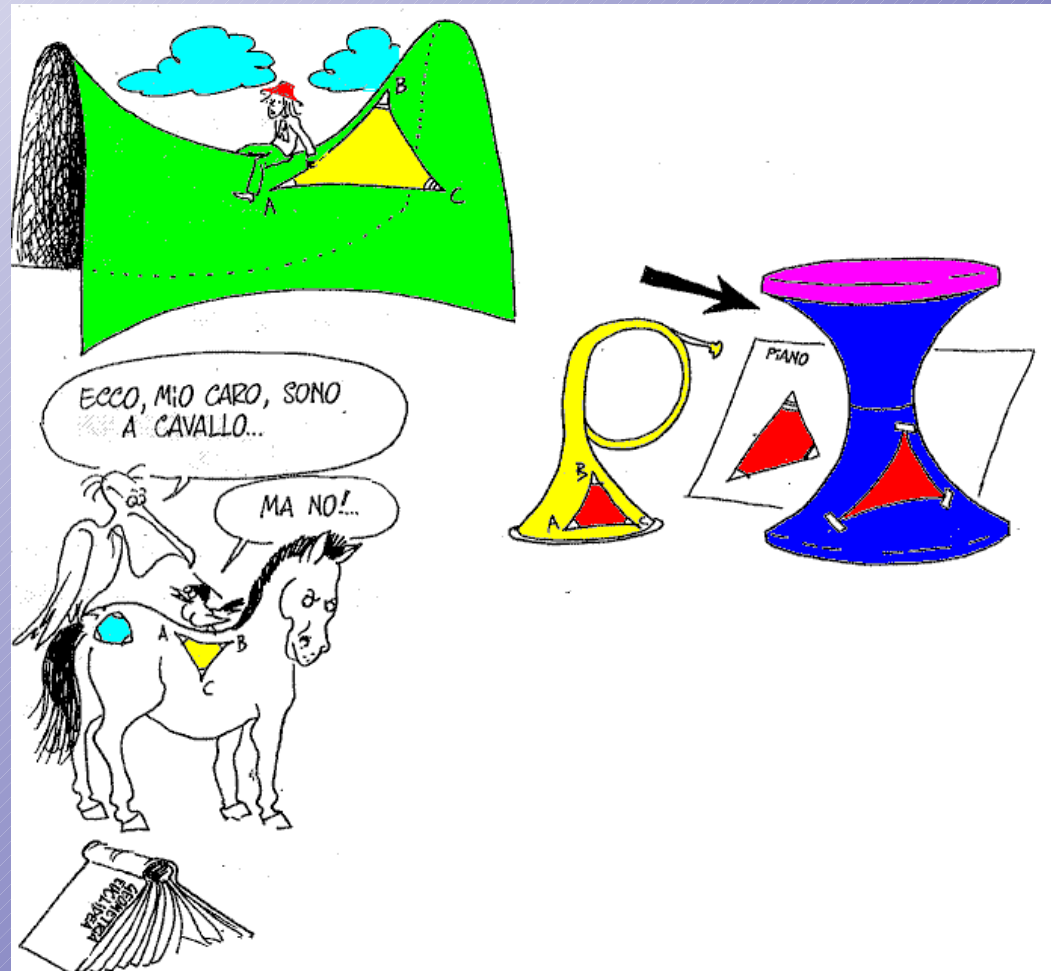
Siano M una superficie e T un triangolo geodetico di vertici A, B, C .
Allora

$$\int_T K(p) d\sigma = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$$

dove $K(p)$ è la curvatura gaussiana della superficie nel punto p .

Superfici con curvatura costante





CURVATURA:

Una superficie curva è una superficie in cui i teoremi euclidei non funzionano.

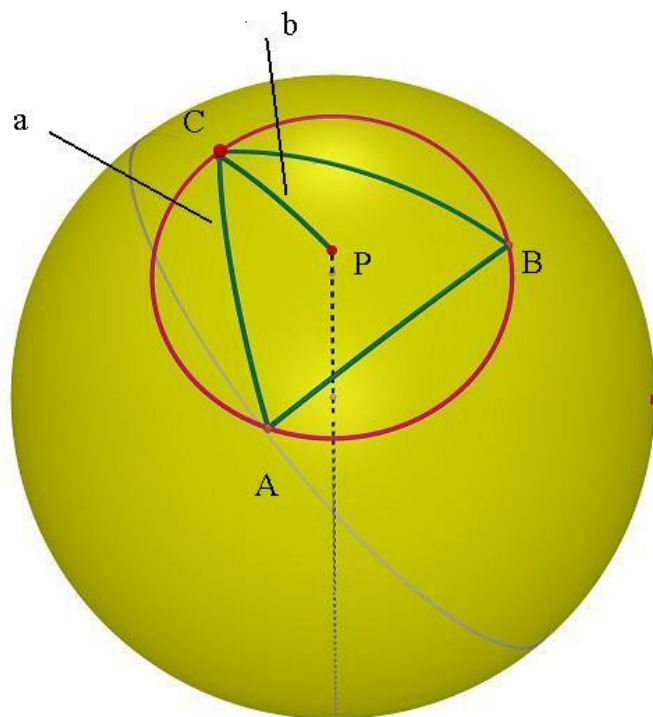
La curvatura è positiva se la somma degli angoli di un triangolo è superiore ad un angolo piatto.

La curvatura è negativa se la somma degli angoli di un triangolo è inferiore ad un angolo piatto.

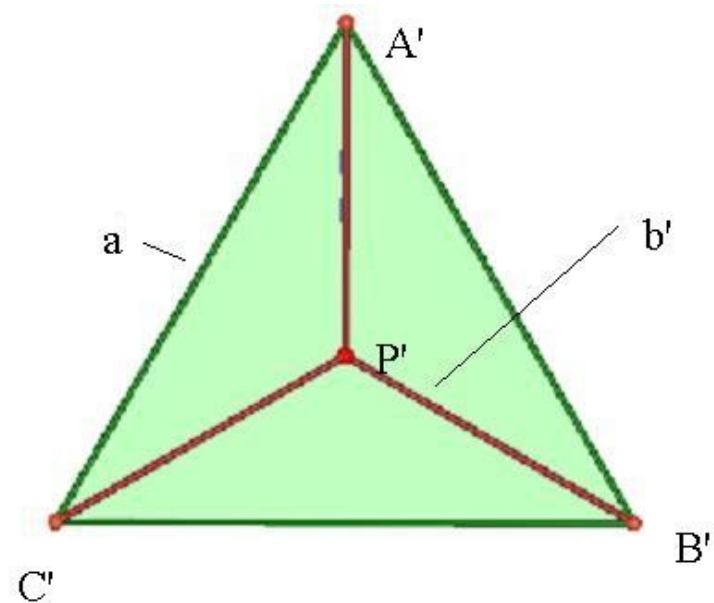
Solo con misurazioni locali, senza far ricorso ad osservazioni esterne alla terra, dal fatto che la somma degli angoli di un triangolo sia diversa da un angolo piatto o che in un triangolo rettangolo non valga il teorema di Pitagora si può dedurre di vivere su una superficie non piana ma curva.

Attenzione: affinché la conclusione sia attendibile, il triangolo deve essere abbastanza grande e non si devono commettere errori di misurazione!!!

Perché non esiste una carta geografica perfetta?



$$a^2 < 3b^2$$



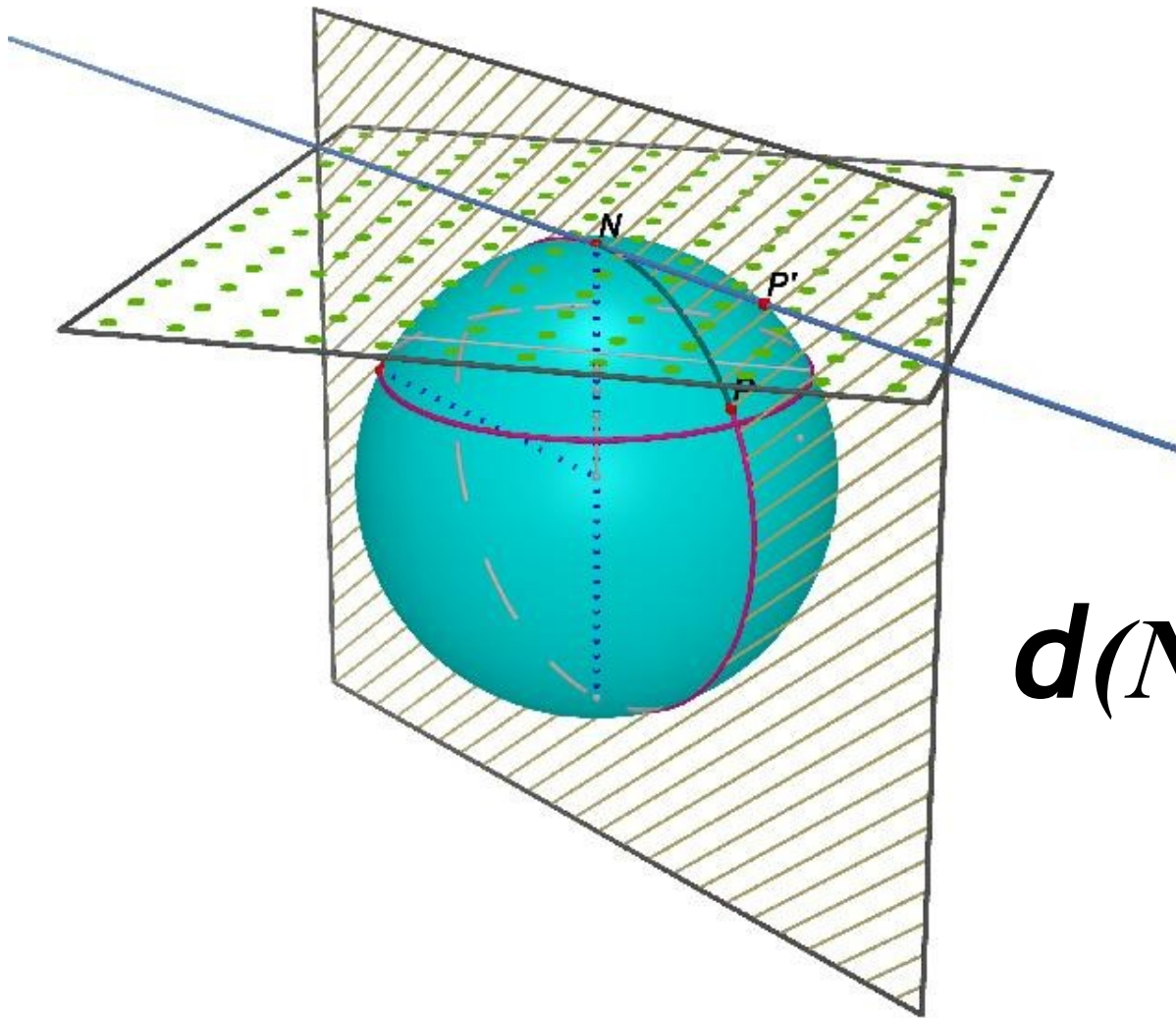
$$a^2 = 3(b')^2$$

Quindi $b \neq b'$.

Non possiamo costruire una carta geografica che abbia una scala costante!!!

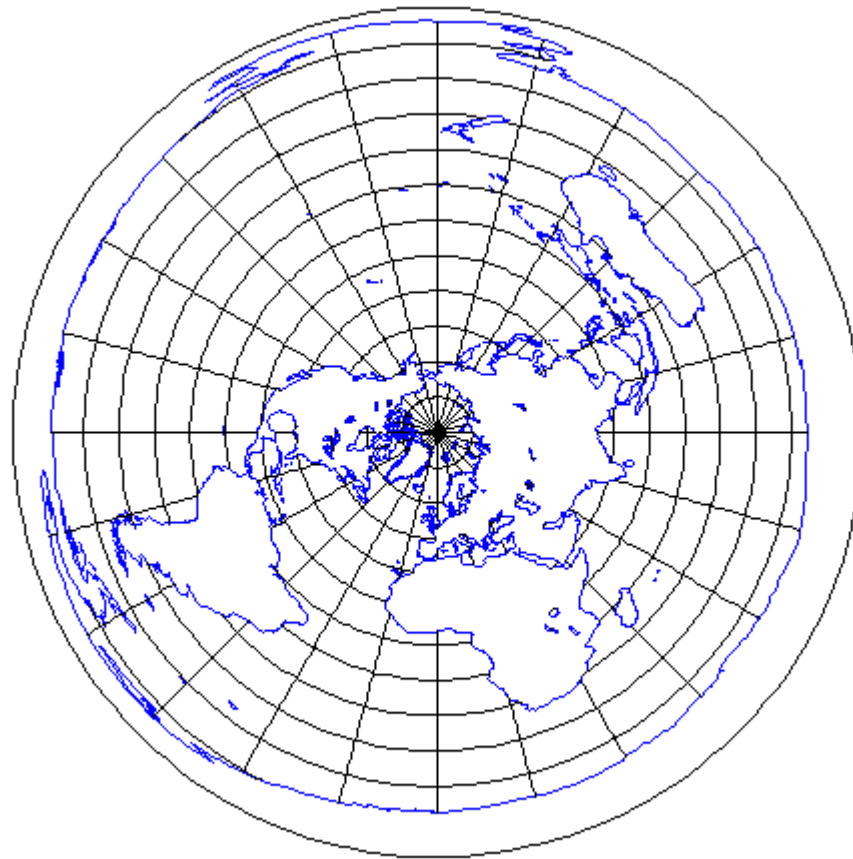
Ogni carta geografica presenta una “distorsione” delle distanze.

La proiezione equidistante azimutale



$$d(N,P)=d(N,P')$$

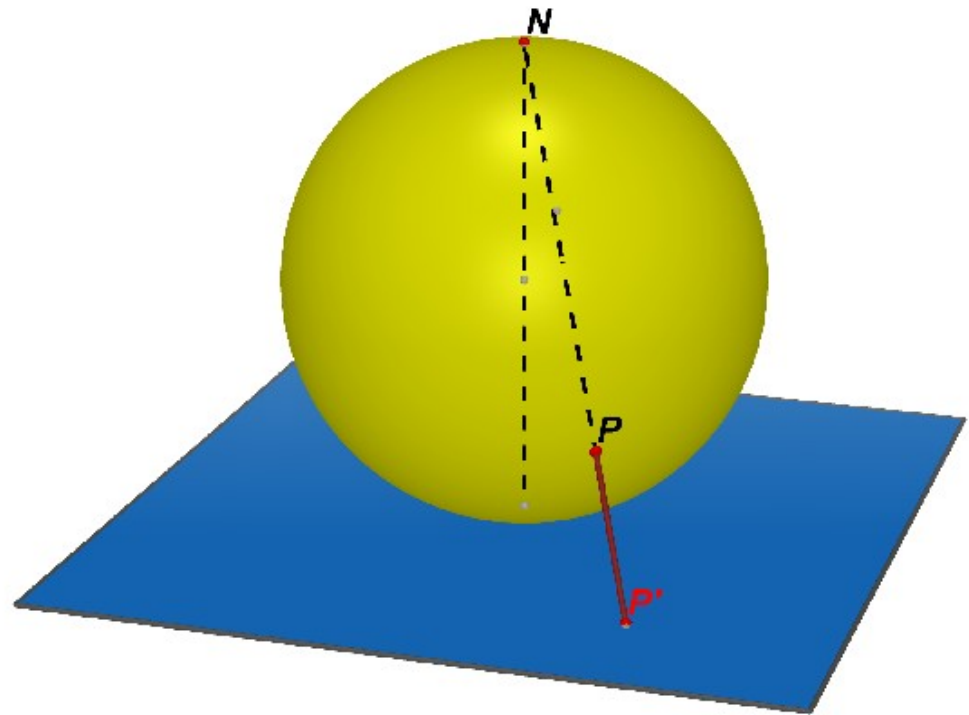
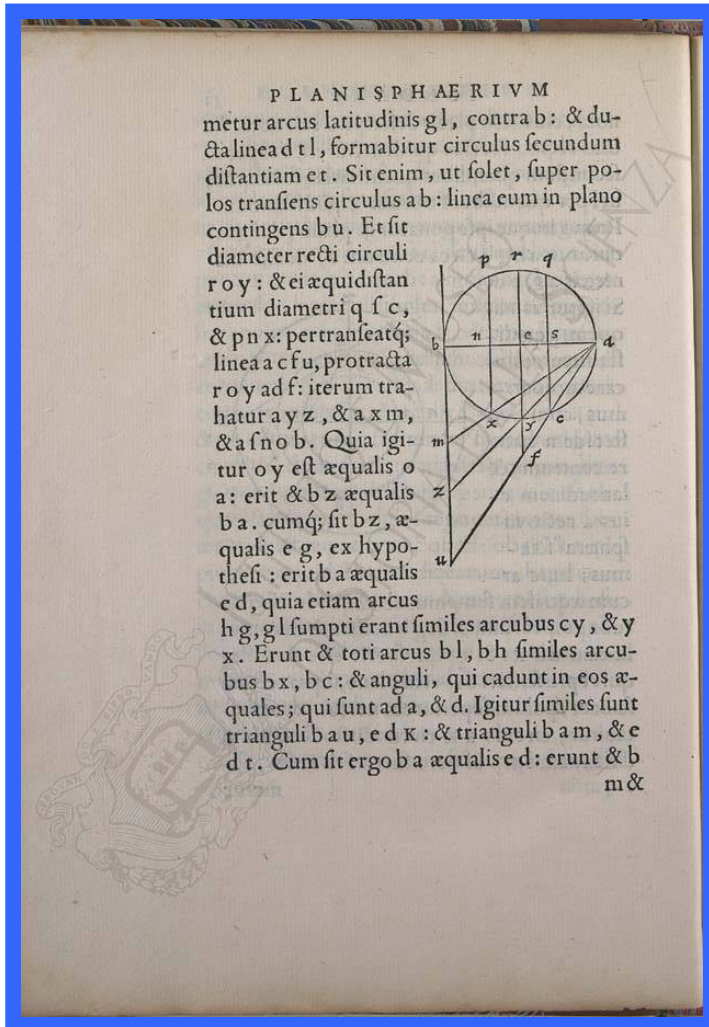
Abstandstreuer Azimutalentwurf



Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Havlicek TU Wien 1139

Proiezione stereografica



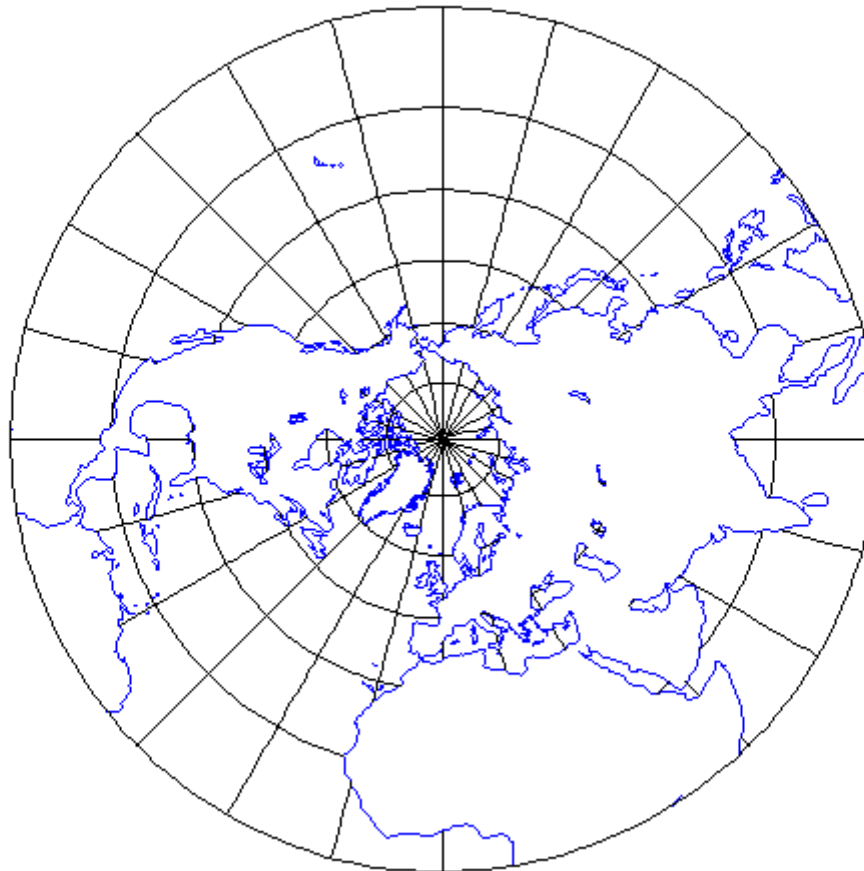
“Planispherium” di Tolomeo
Ristampa veneziana XVIsec.

L'astrolabio





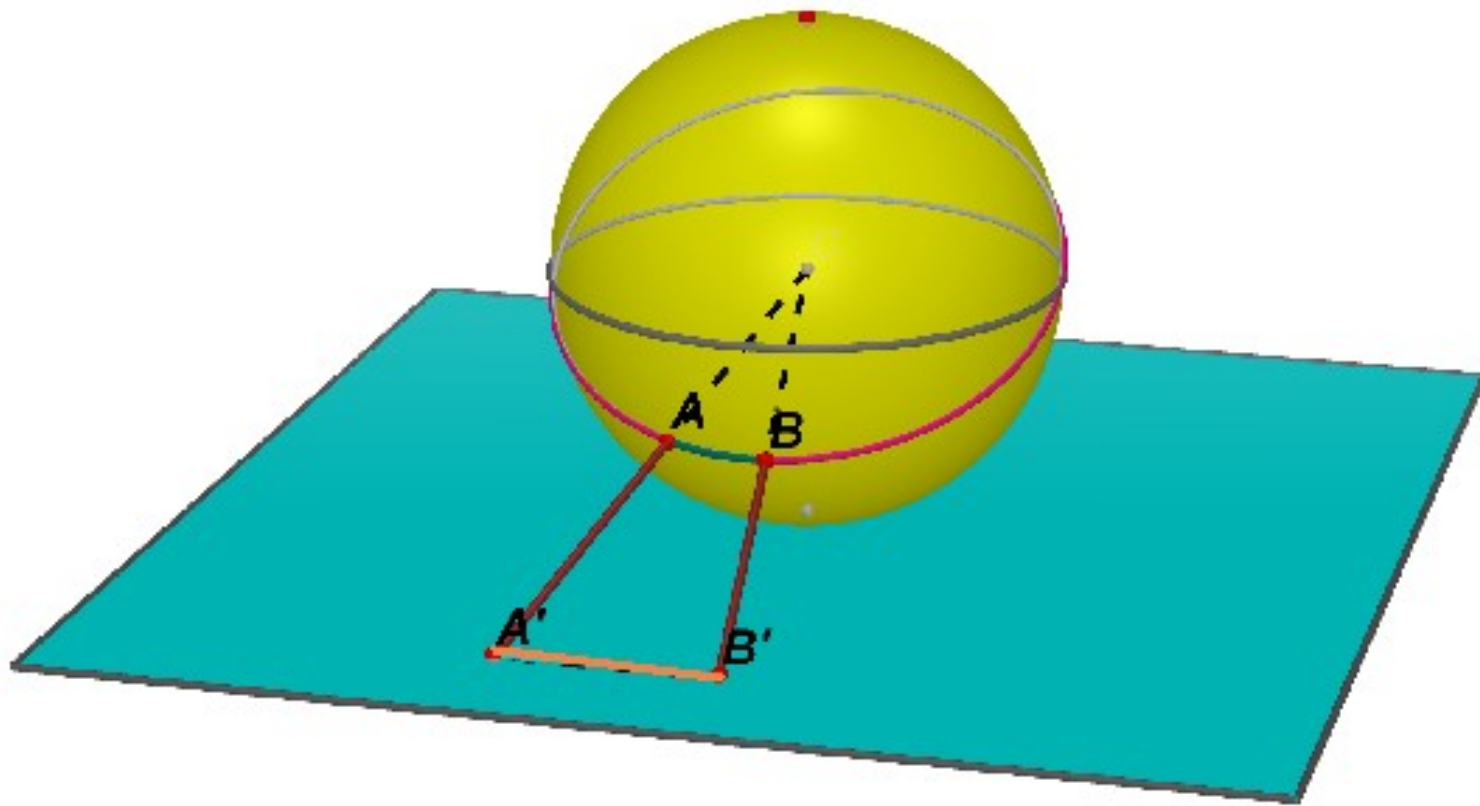
Stereographische Projektion



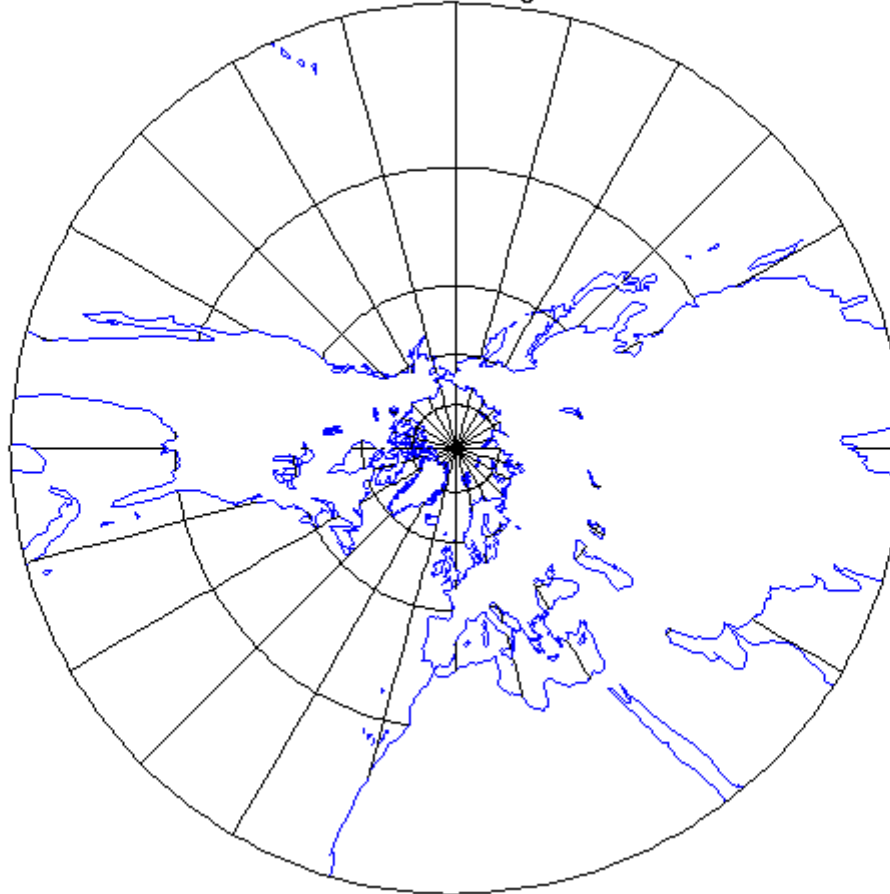
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Havlicek TU Wien 1133

Proiezione gnomonica



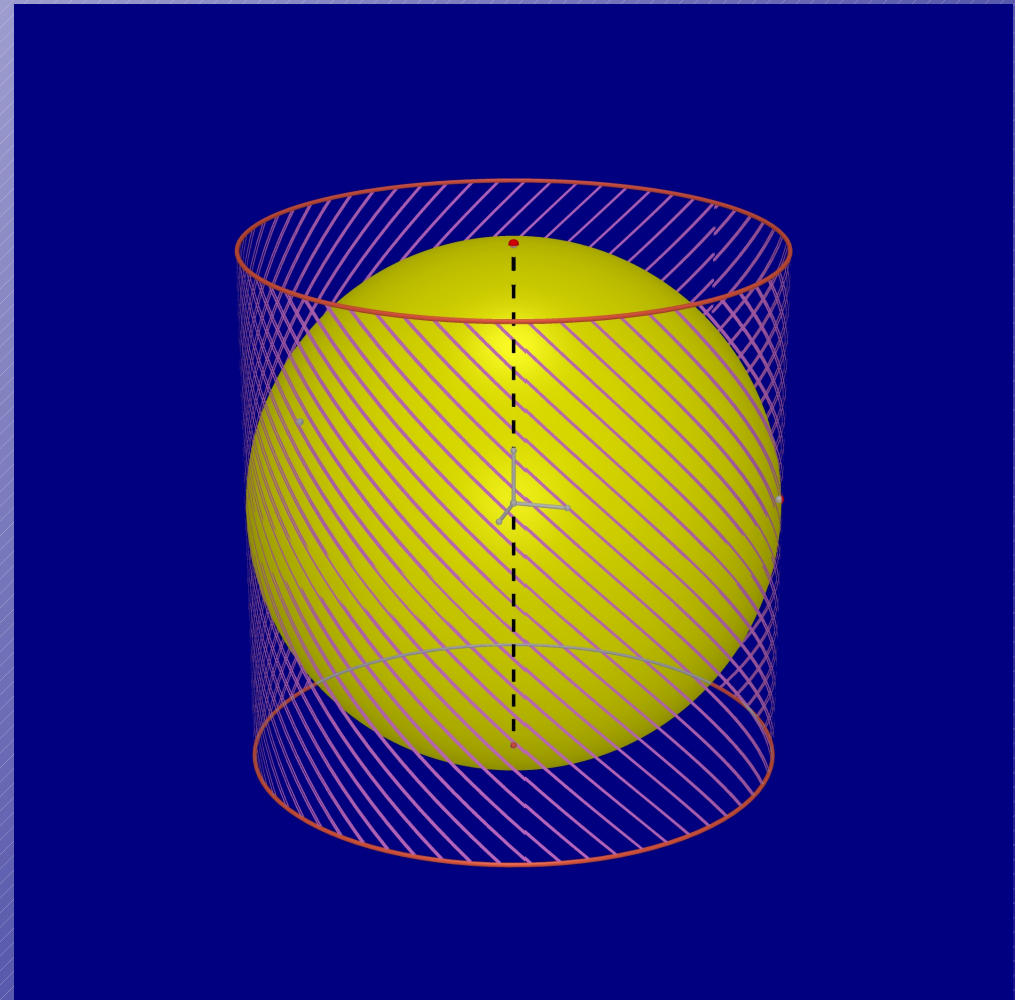
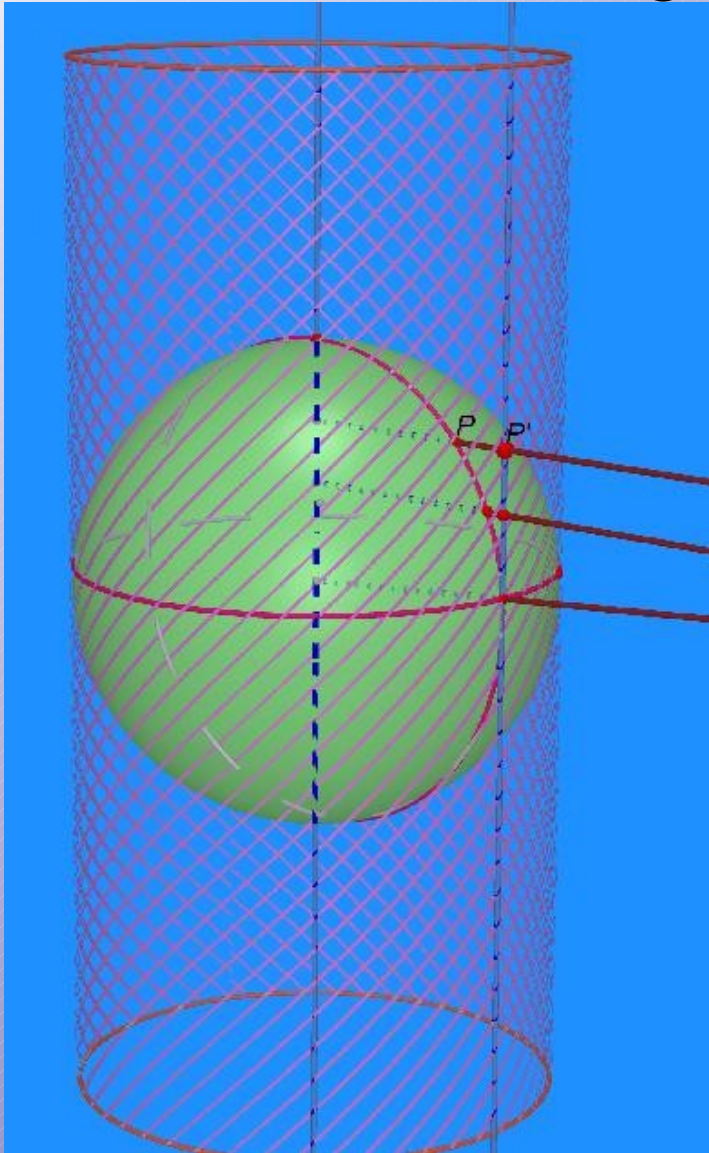
Gnomonische Projektion



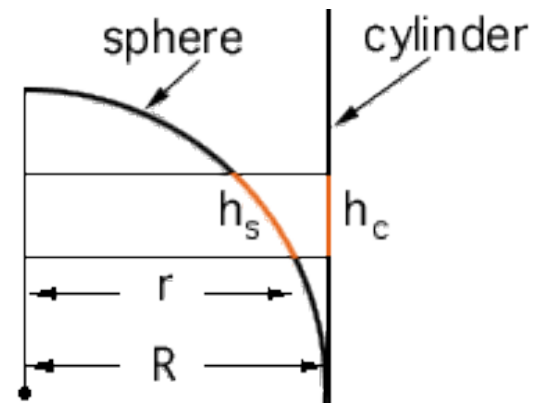
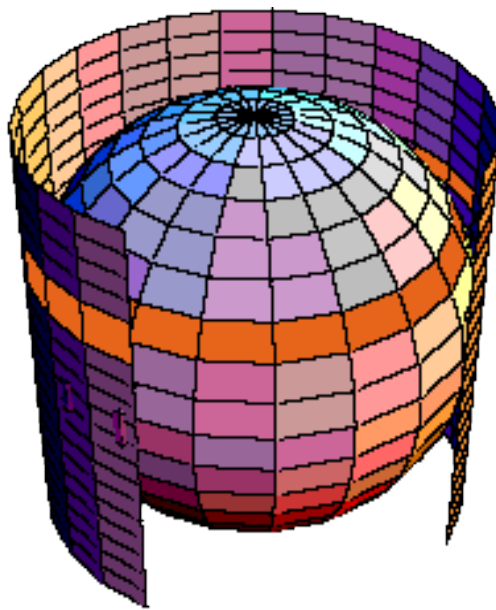
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

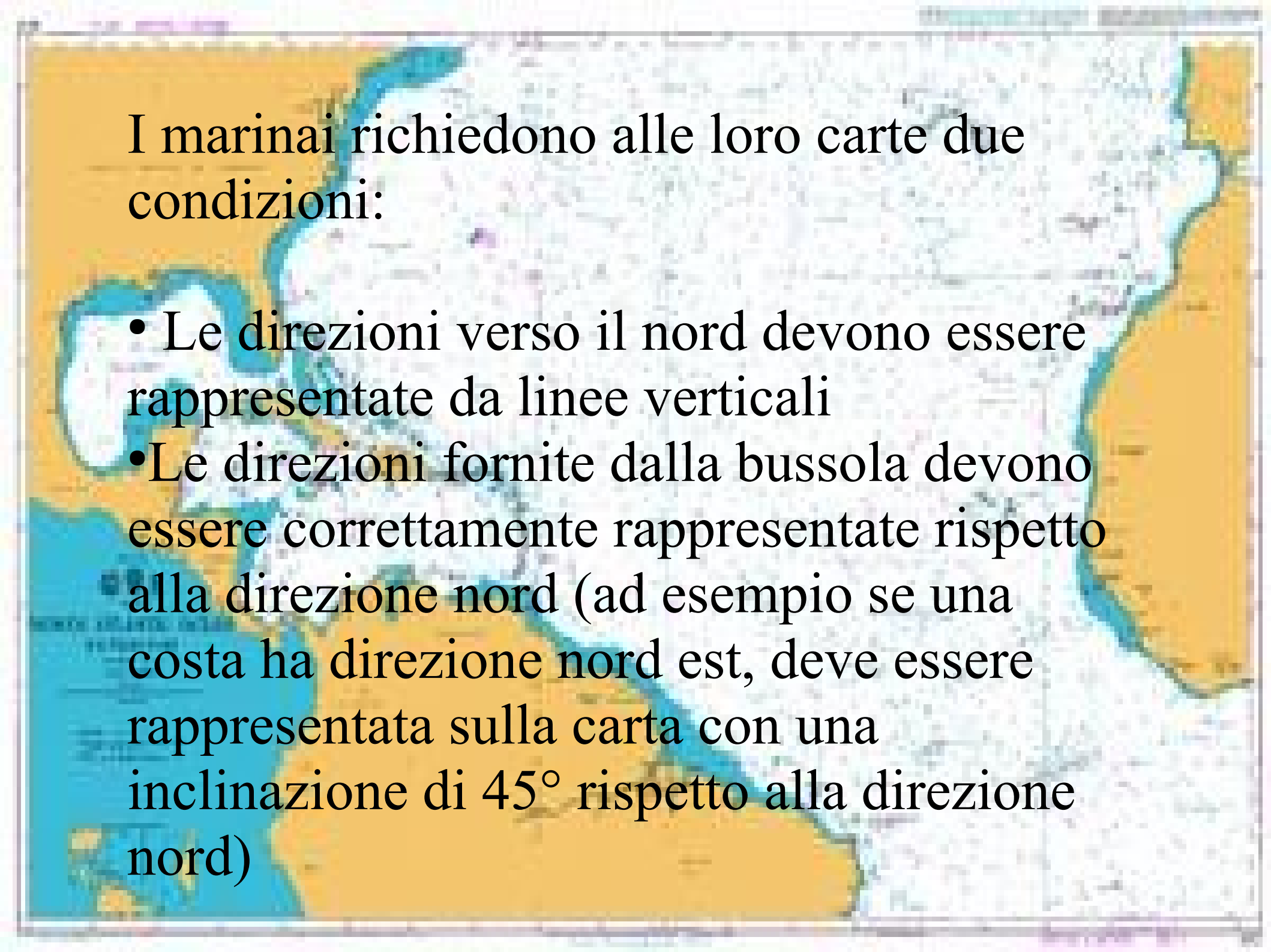
Havlicek TU Wien 1133

Proiezione cilindrica



Calcolo dell'area della superficie sferica (Archimede)





I marinai richiedono alle loro carte due condizioni:

- Le direzioni verso il nord devono essere rappresentate da linee verticali
- Le direzioni fornite dalla bussola devono essere correttamente rappresentate rispetto alla direzione nord (ad esempio se una costa ha direzione nord est, deve essere rappresentata sulla carta con una inclinazione di 45° rispetto alla direzione nord)

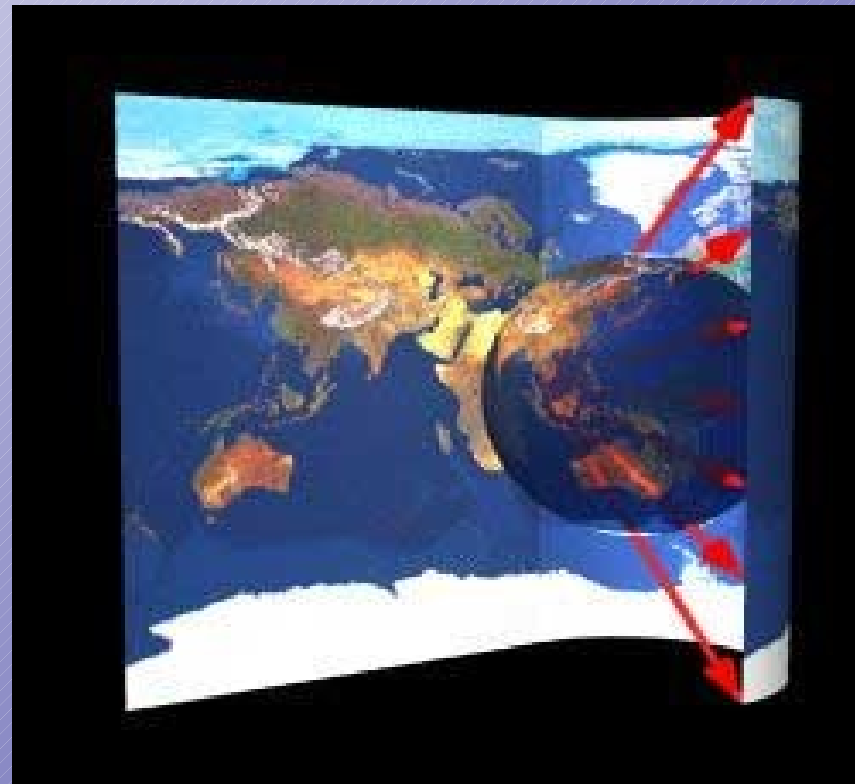
Proiezione di Mercatore

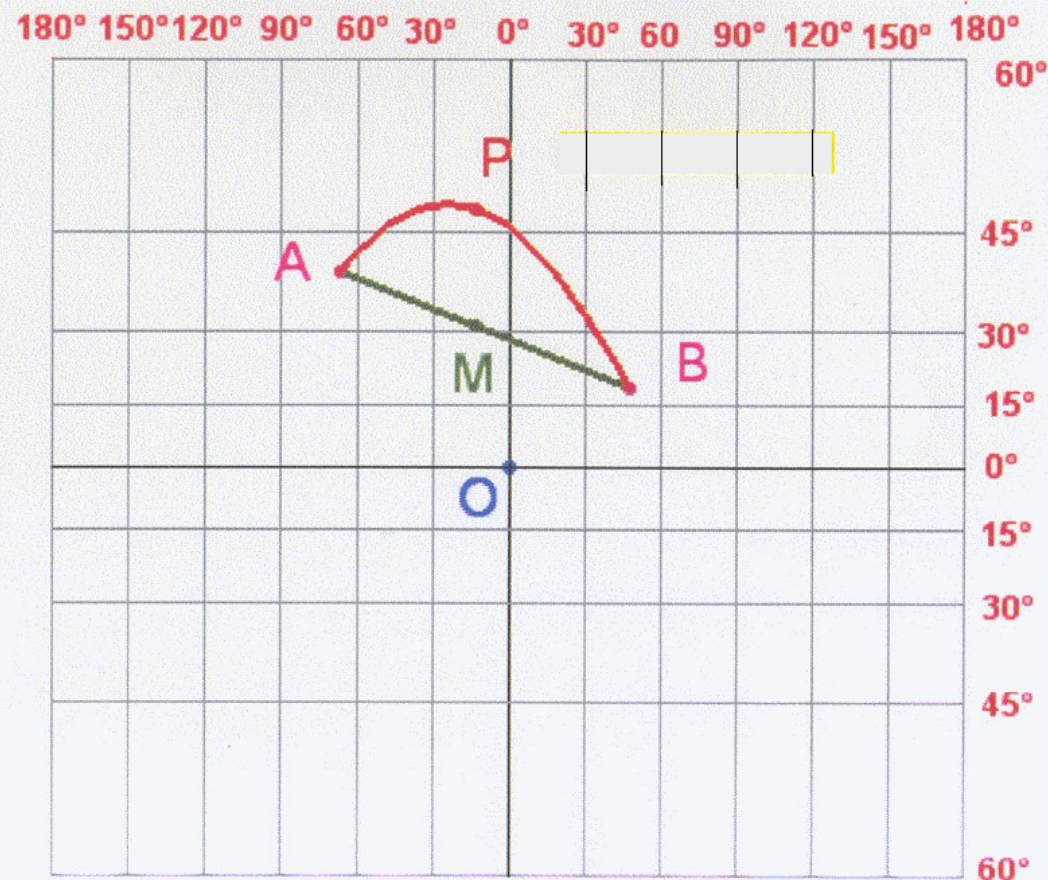
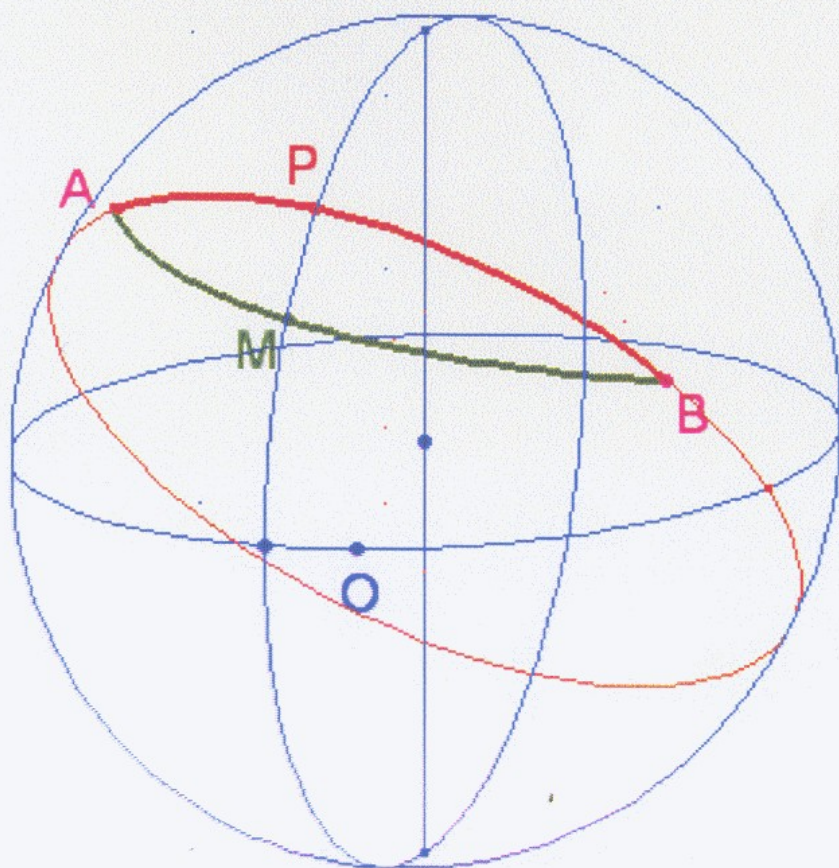


Gerhard Kremer (detto Mercatore)
1512-94

Così Mercatore spiega i principi sulla base dei quali fu disegnata la sua carta:

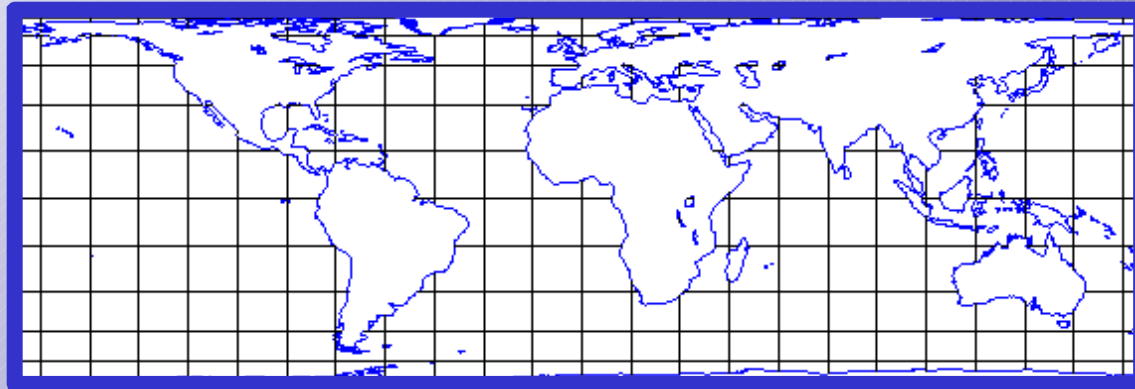
“Eseguendo questa nuova rappresentazione del mondo abbiamo tentato di usare una nuova proporzione ed una nuova correlazione dei meridiani con i paralleli. Abbiamo aumentato progressivamente i gradi di latitudine verso ciascun polo in proporzione all’allungamento dei paralleli rispetto all’equatore.”



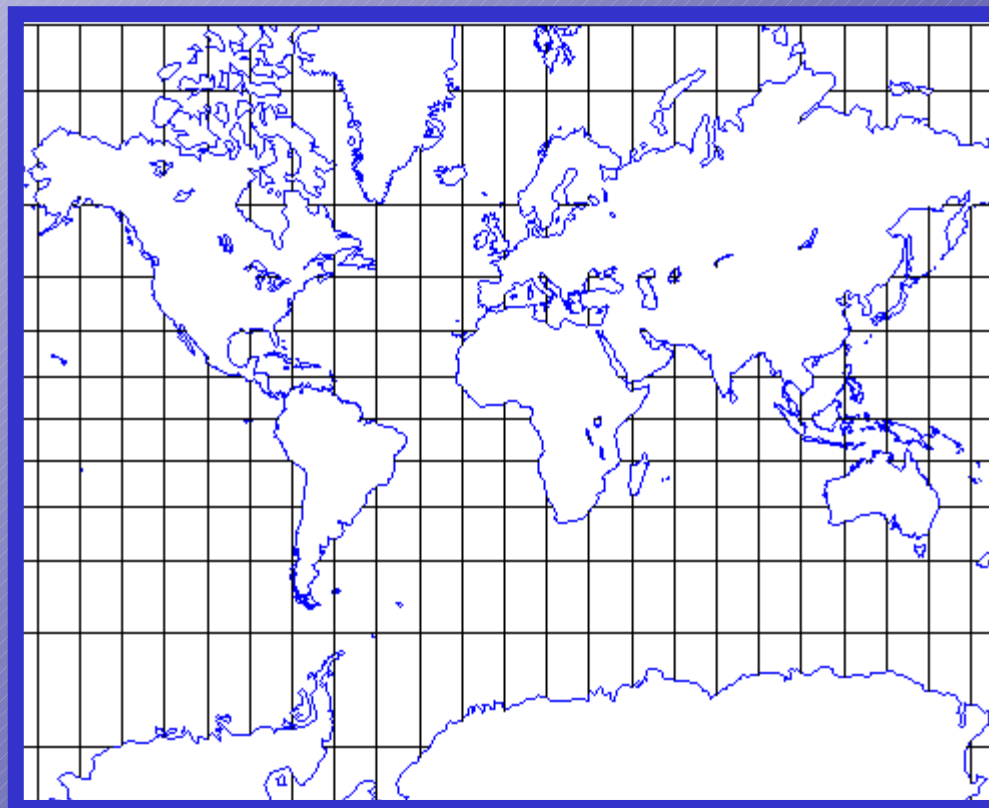


L'ortodromia è il cammino più corto da A a B: è un arco di cerchio massimo (in rosso)

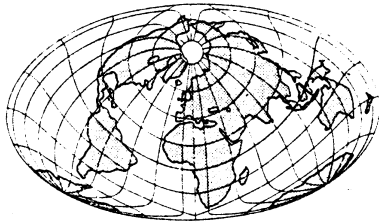
La lossodromia (in verde) è la traiettoria in linea retta sulla carta di Mercatore: forma un angolo costante con i meridiani



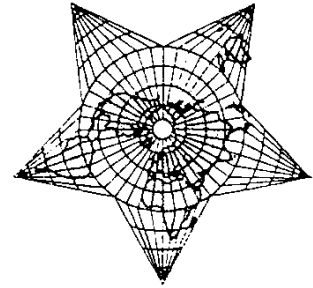
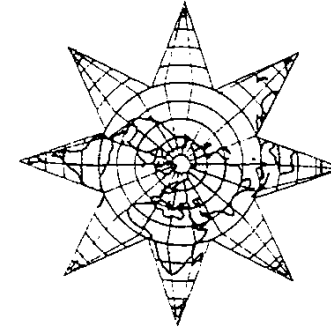
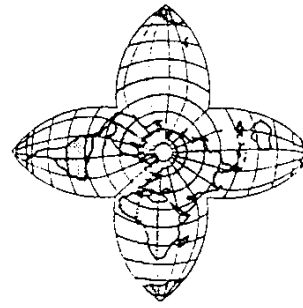
Proiezione cilindrica



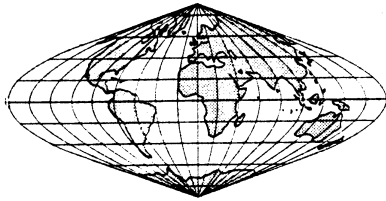
Proiezione di Mercatore



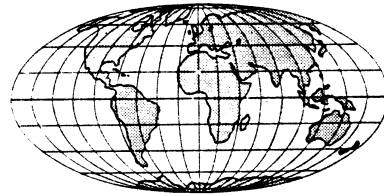
Projection de Briesemeister



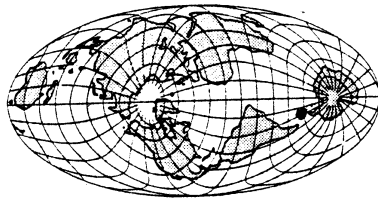
Projections étoilées



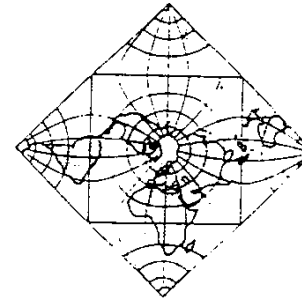
Projection de Sanson-Flamsteed



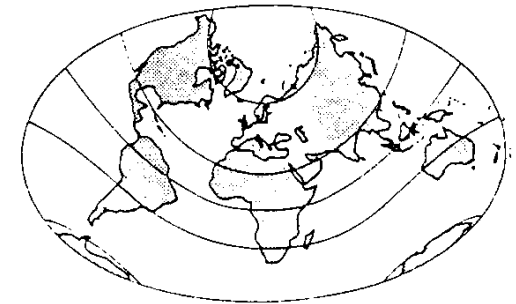
Projection de Mollweide



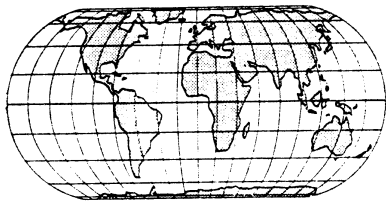
Projection « Atlantis » de Bartholomew



Projection périodique de Peirce



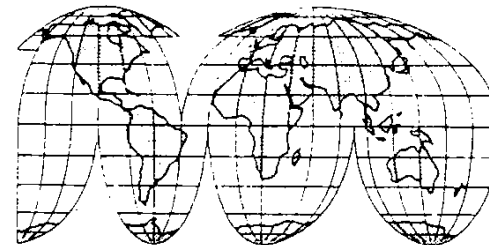
Projection compensée de Bertin



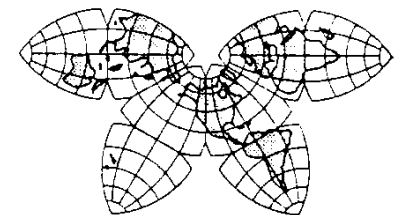
Projection d'Eckert IV



Projection « amerdillo » de Raiz



Projection interrompue de Goode



Projection interrompue de Cahill

Carta di Peters

