

Progetto Lauree Scientifiche

Liceo Scientifico “Leonardo da Vinci”
Maglie, 18 gennaio 2017

OTTIMIZZAZIONE E DINTORNI

Cosimo De Mitri

- PRIMA PARTE -



OTTIMIZZAZIONE

L'**ottimizzazione** è quella branca della Matematica che si occupa della ricerca del **valore ottimo** - massimo o minimo - di una assegnata **funzione** sotto alcune **condizioni** anch'esse assegnate

Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di fisica

Che inclinazione bisogna dare al cannone se si vuole che la gittata sia massima?



Un pizzico di storia

Nel “Nuova Scientia”, del 1537, **Tartaglia** scrive:

«Ogni transito [...] sempre sarà in parte retto e in parte curvo, e la parte curva sarà parte d'una circonferentia di cerchio»

Ma subito dopo precisa:

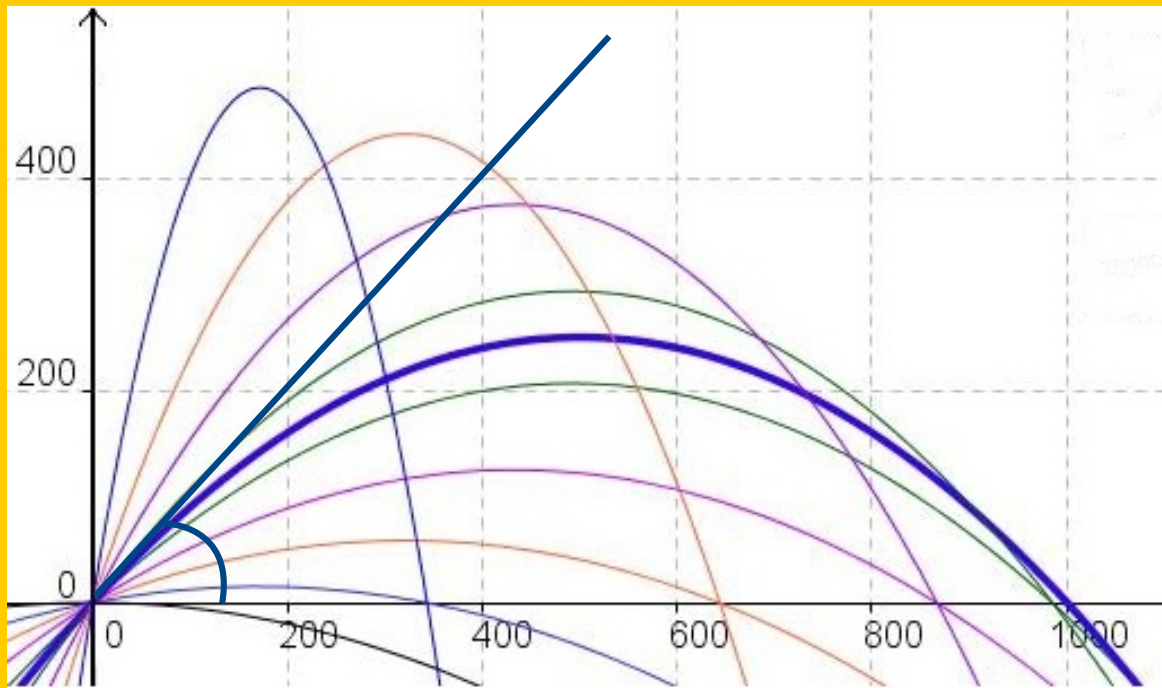
«niun transito [...] mai puol aver alcuna parte che sia perfettamente retta, per causa della gravità che se ritrova in quel tal corpo: la quale continuamente lo va stimulando e tirando verso il centro del mondo»

Un piccolo ma importante passo avanti rispetto alle credenze degli aristotelici! Ma per arrivare alla scoperta del moto parabolico bisogna aspettare gli studi di **Galilei**, almeno un altro mezzo secolo.

Esempi di problemi di ottimizzazione

La gittata massima

Si calcola che l'angolo di lancio per la gittata massima è l'angolo di 45 gradi



Ancora Tartaglia:

*«Se una medesima
possanza movente eiettarà
corpi egualmente gravi
[...], quello che farà il suo
transito elevato a 45 gradi
sopra l'orizzonte farà
ancora il suo effetto più
lontan dal suo principio
[...] che in qualunque
altro modo elevato»*

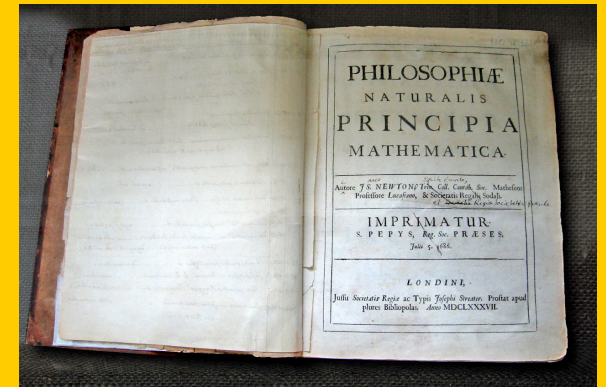
Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di fisica

Che forma deve avere un oggetto che si muove in un fluido se si vuole che sia minima la resistenza al moto?



Galleria del vento a Maranello - Renzo Piano - 1997

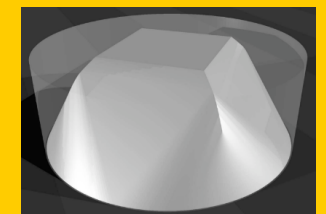


Un pizzico di storia

Nei “Principia Mathematica”, del 1685, **Newton** scrive:

«Si globus & cylindrus aequalibus diametris descripti, [...] secundum plagam axis cylindri, aequali cum velocitate moveantur, erit resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri. [...] Quam quidem propositionem in construendis navibus non inutilem futuram esse censeo.»

Newton arrivò a questa conclusione senza disporre di strumenti matematici potenti come quelli odierni. La moderna teoria della fluidodinamica ha confermato l'esattezza dei suoi risultati.

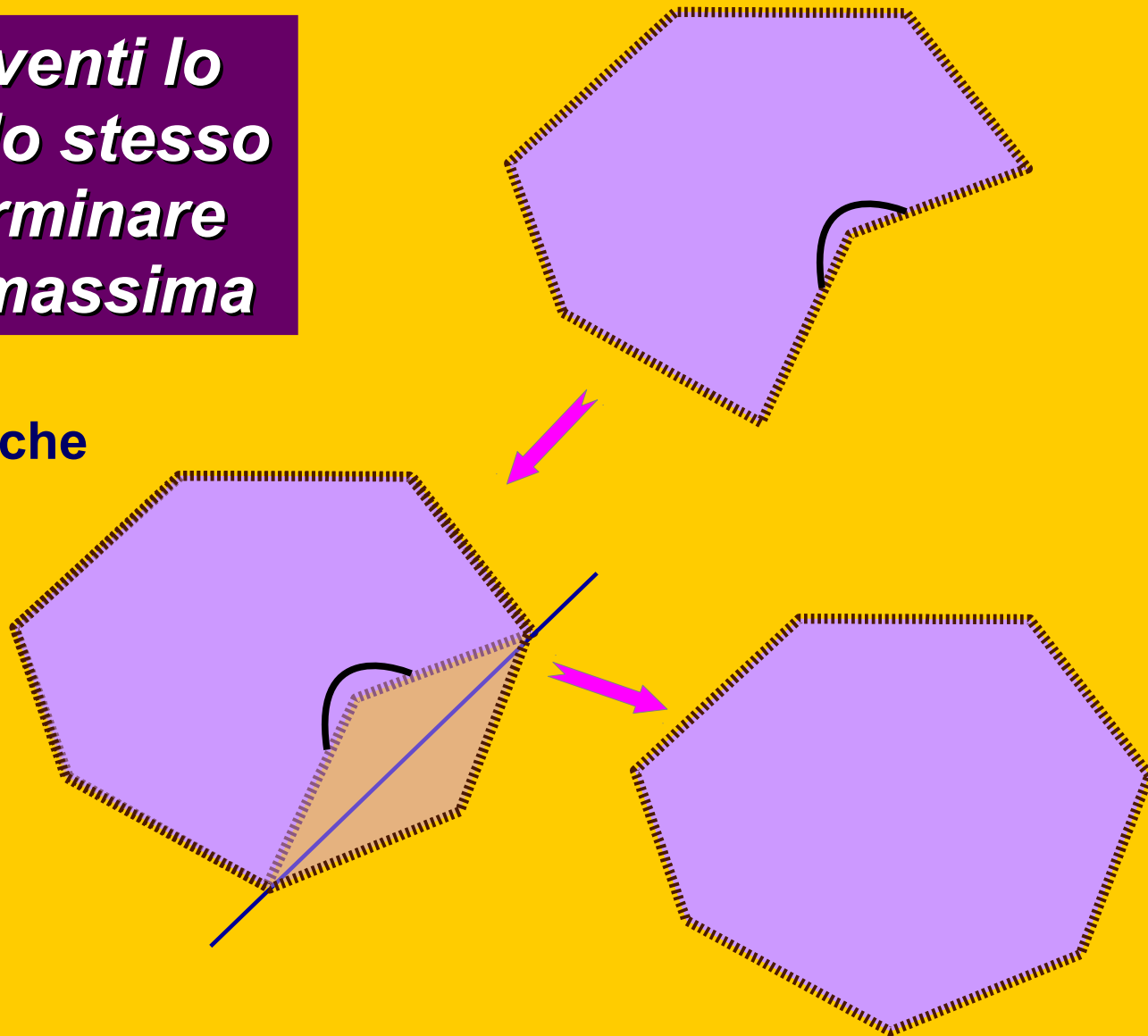


Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di geometria

Fra tutti i poligoni aventi lo stesso perimetro e lo stesso numero di lati, determinare quello che ha area massima

Una prima osservazione è che *la soluzione non può mai essere rappresentata da un poligono concavo*: se un poligono ha un angolo concavo, usando i suoi stessi lati se ne può costruire uno convesso avente area maggiore



Esempi di problemi di ottimizzazione

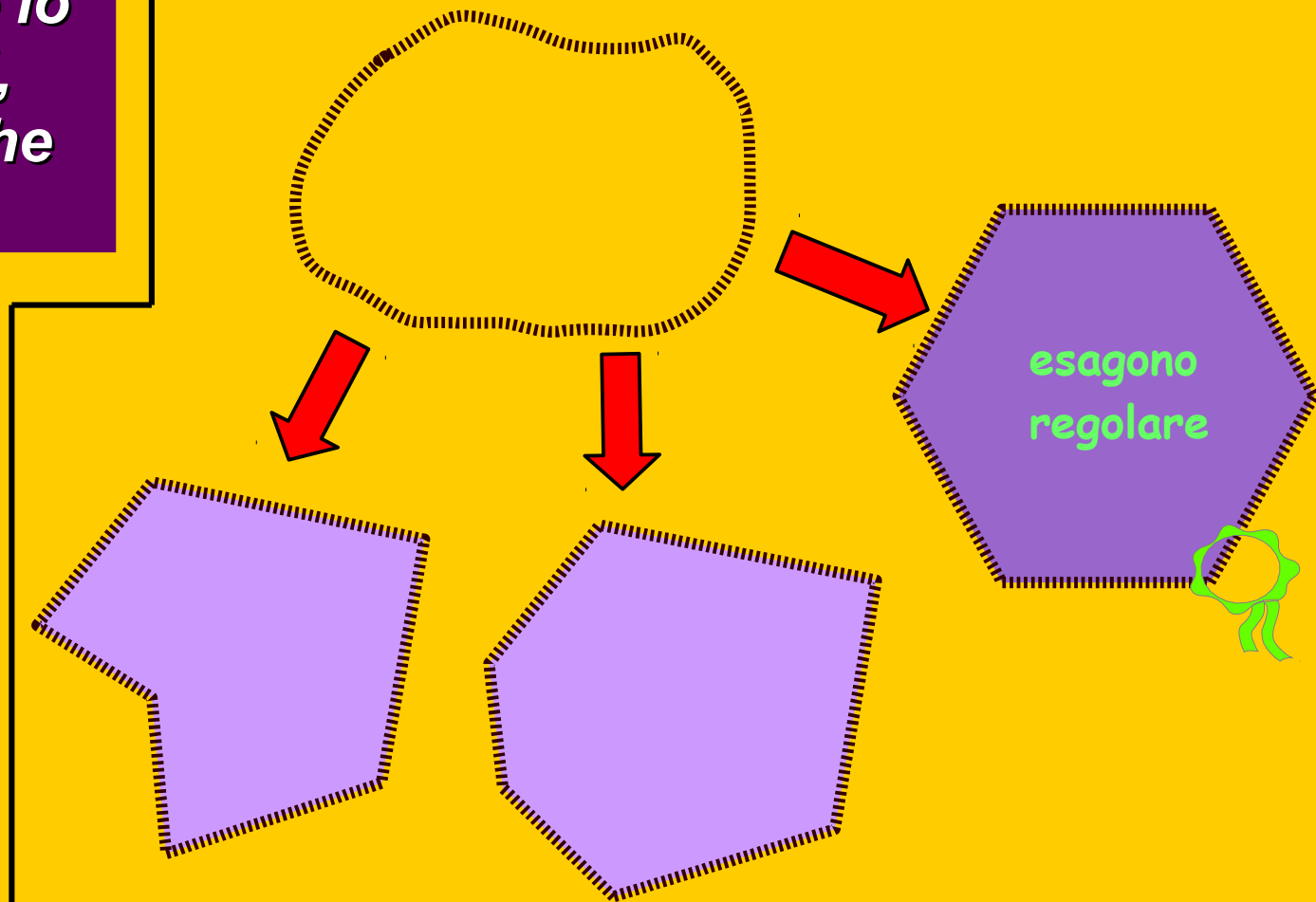
Problemi di geometria

Ritorniamo al problema

Fra tutti i poligoni aventi lo stesso perimetro e lo stesso numero di lati, determinare quello che ha area massima

La soluzione è il *poligono regolare* con quel dato perimetro e quel dato numero di lati

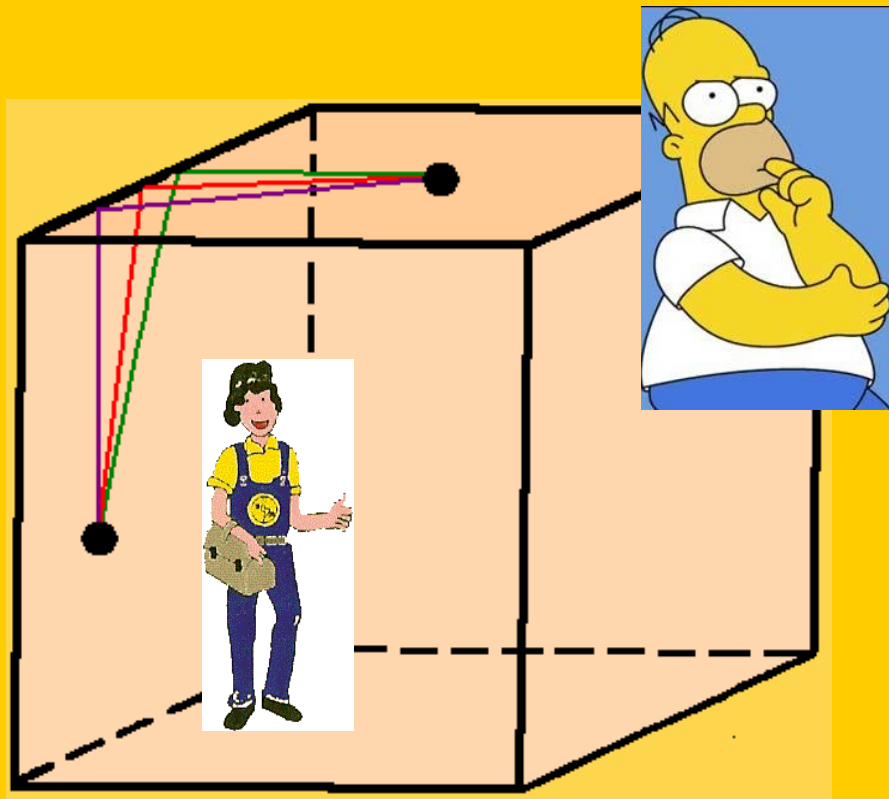
Ad esempio, si dispone di una **corda chiusa** e si formano con essa dei **poligoni esagonali**



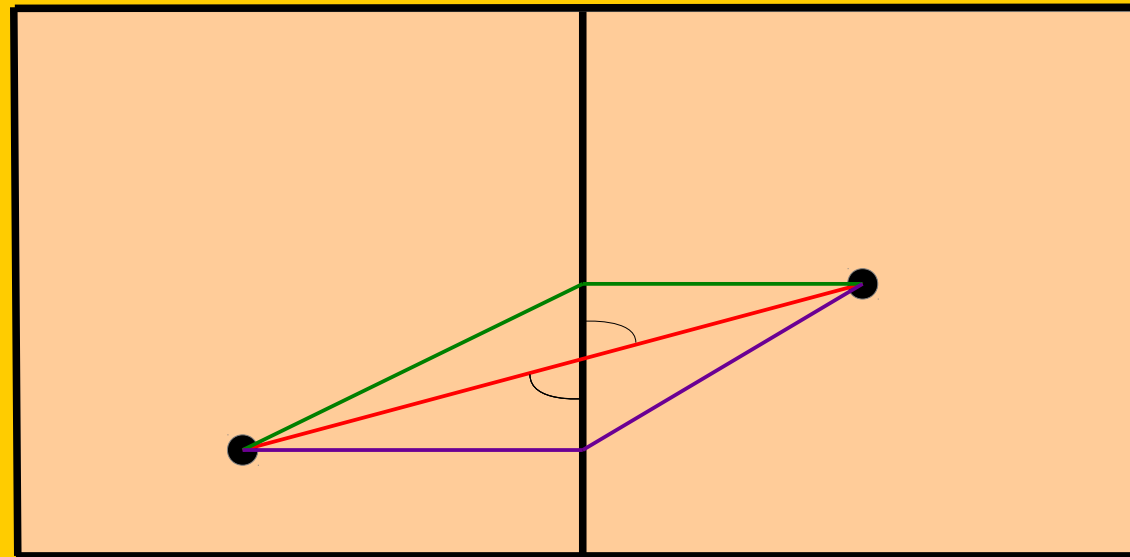
Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di geometria

Fra tutti i percorsi che congiungono due punti assegnati sulla superficie di un cubo, determinare quello che ha lunghezza minima



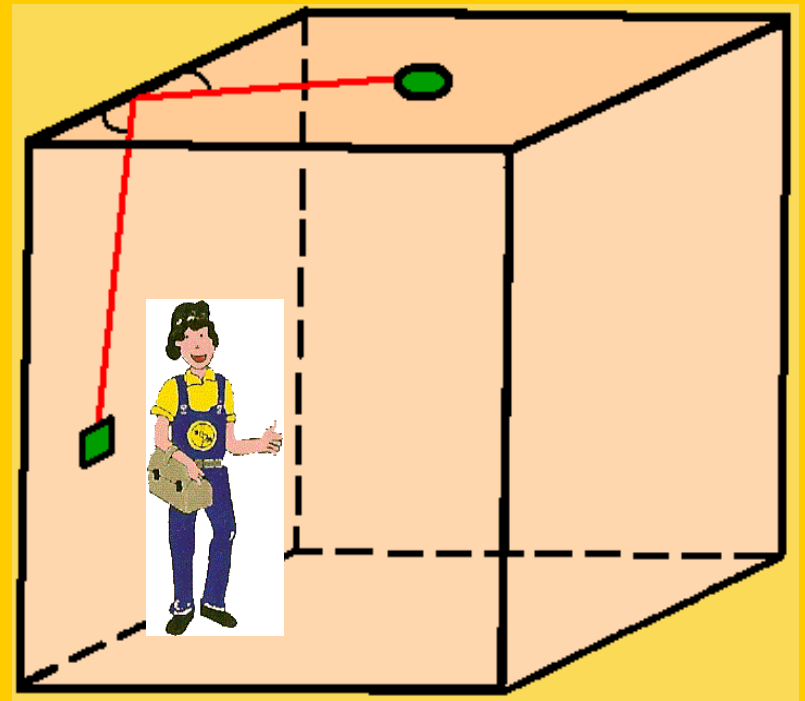
Ad esempio, dei tre percorsi proposti in figura, il più corto è quello di colore **rosso**



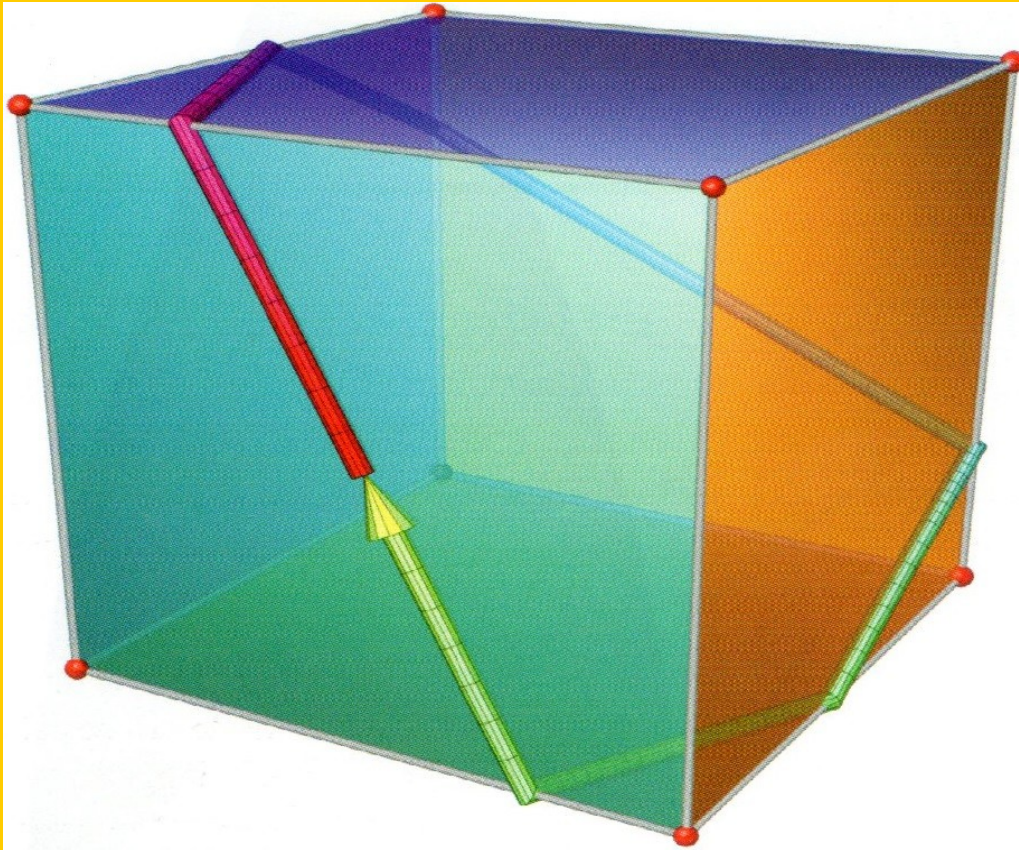
Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di geometria

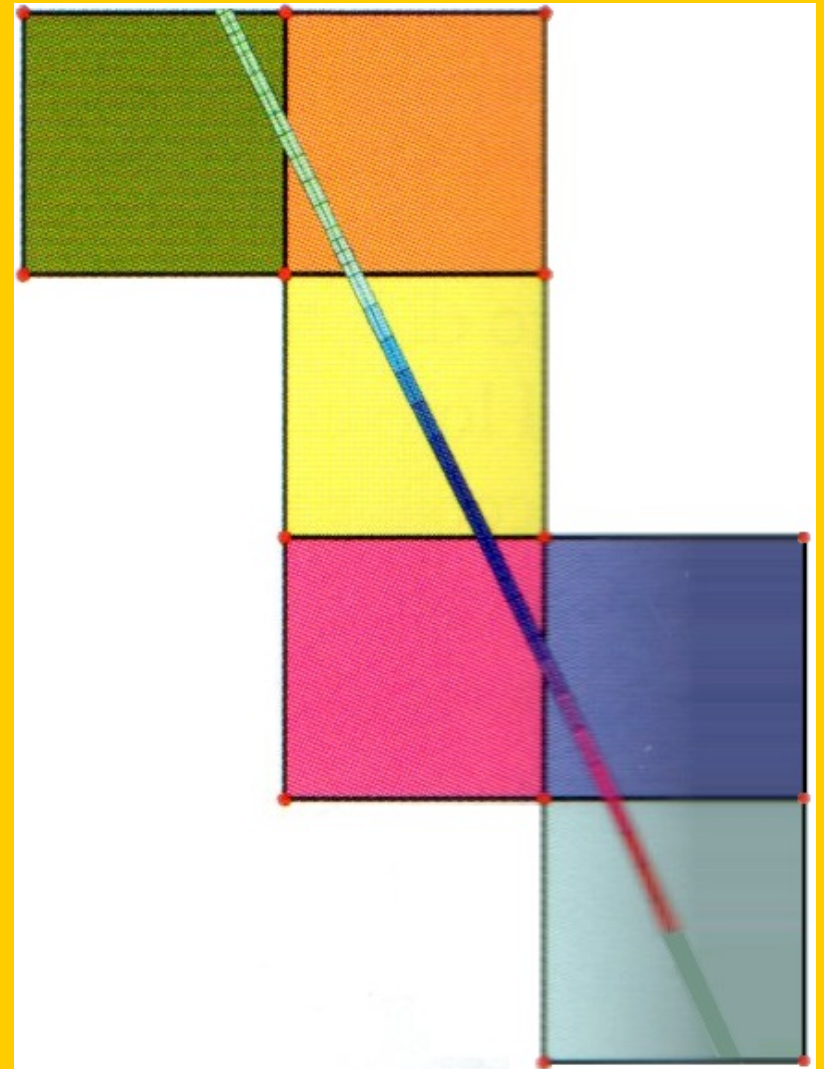
Si chiama *geodetica* la curva più breve fra tutte quelle che si possono disegnare su una data superficie per collegare due punti assegnati su di essa



Passeggiata sul cubo



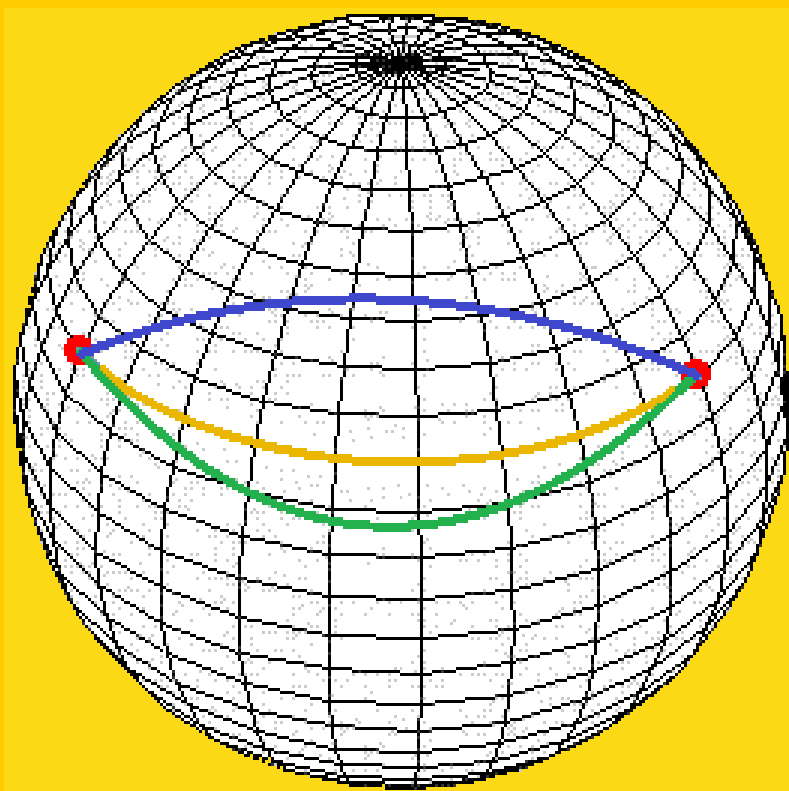
Un percorso che tocca
tutte le facce del cubo
e ritorna al punto di
partenza



Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di geometria

Fra tutti i percorsi che congiungono due punti della superficie di una sfera, determinare quello che ha lunghezza minima

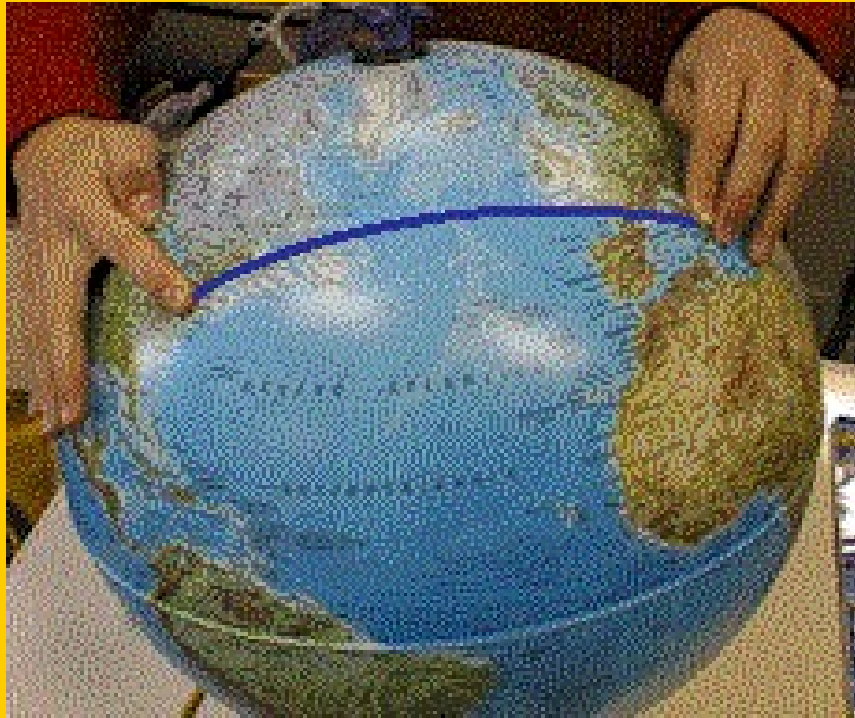
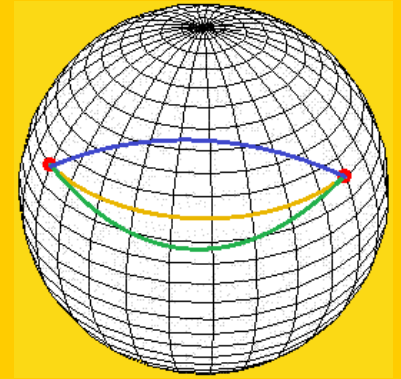


Ad esempio, dei tre percorsi proposti in figura, è più corto quello **verde**, quello **giallo** o quello **blu**?

Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di geometria

Basta un elastico per risolvere il problema



Le geodetiche sulla superficie terrestre sono le circonferenze massime

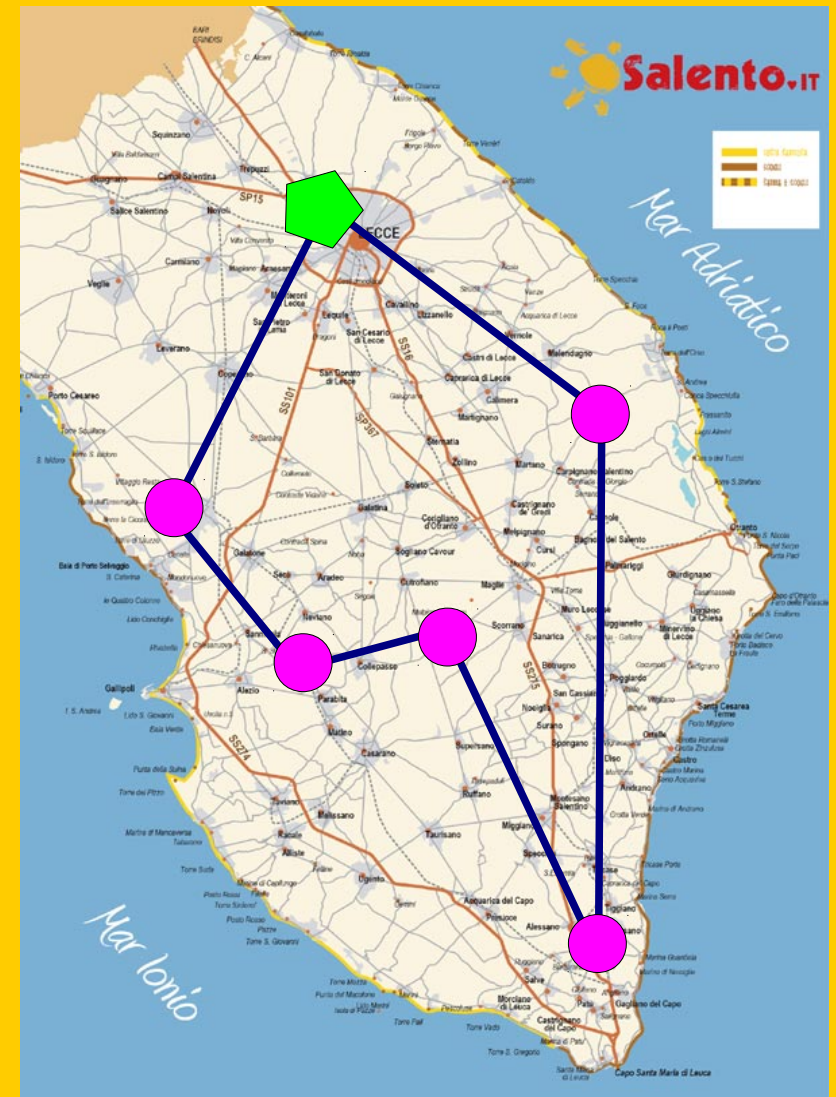


**Rotta aerea minima fra
Leuca a Indianapolis**

Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di geometria

Stabilire in quale ordine un commesso viaggiatore deve raggiungere alcuni suoi clienti, per poi tornare alla sua abitazione, minimizzando le spese di carburante



Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di economia

*In un allevamento di polli il mangime viene preparato mescolando tre diversi tipi di cereali.
Trovare la combinazione che minimizza i costi fra tutte quelle che rispettano certi requisiti nutrizionali*



Un pizzico di storia

Il fondatore della **programmazione lineare** è considerato **George B. Dantzig** (1914-2005), che durante la seconda guerra mondiale fu al servizio dell'Aeronautica Militare degli Stati Uniti.

In quest'ambito egli doveva risolvere problemi di carattere logistico relativi all'approvvigionamento di svariati articoli destinati a centinaia di migliaia di persone.

Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di economia

Un'impresa industriale ha necessità di tenere in magazzino una quantità sufficiente di materie prime.

Ogni ordinazione comporta anche delle spese fisse, per cui conviene fare poche ordinazioni, ciascuna di grandi quantità di merce.

D'altra parte, troppa merce in giacenza comporta molte spese di magazzinaggio.

Il problema è stabilire frequenza delle ordinazioni e quantità di merce per ogni ordinazione tali da minimizzare i costi.



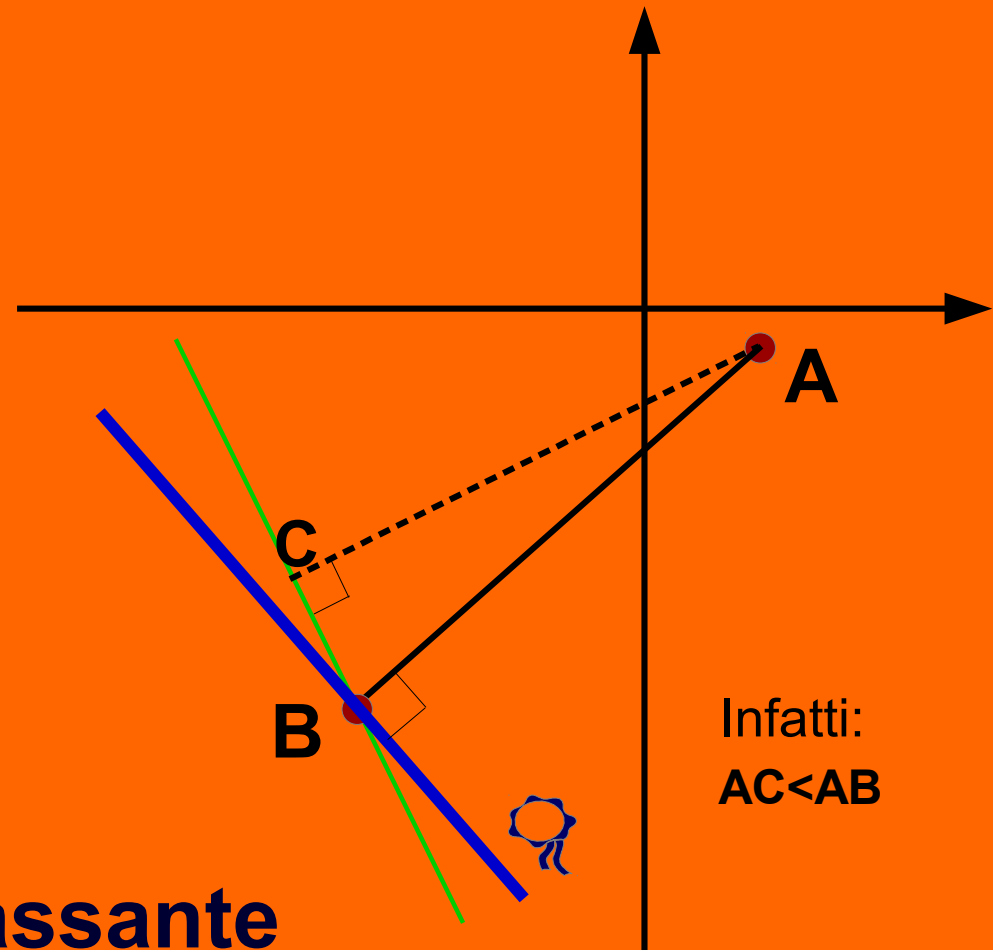
Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi assegnati all'Esame di Maturità Scientifica

Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2,-1)$ e $B(-6,-8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B ed avente distanza massima da A .

[Quesito 3 - Anno 2013]

La soluzione è la retta passante per B e perpendicolare alla retta AB



Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi assegnati all'Esame di Maturità Scientifica

**Qual è la capacità massima, in litri,
di un cono di apotema 1 metro?**

[Quesito 4 - Anno 2012]

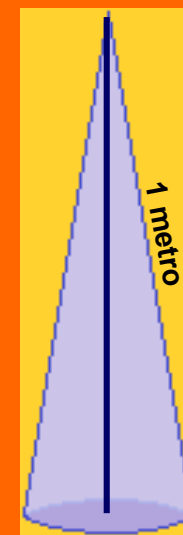
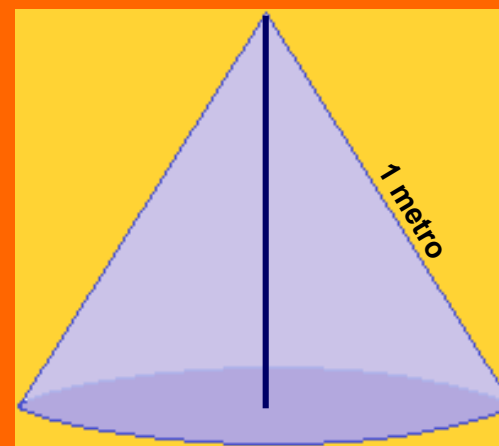
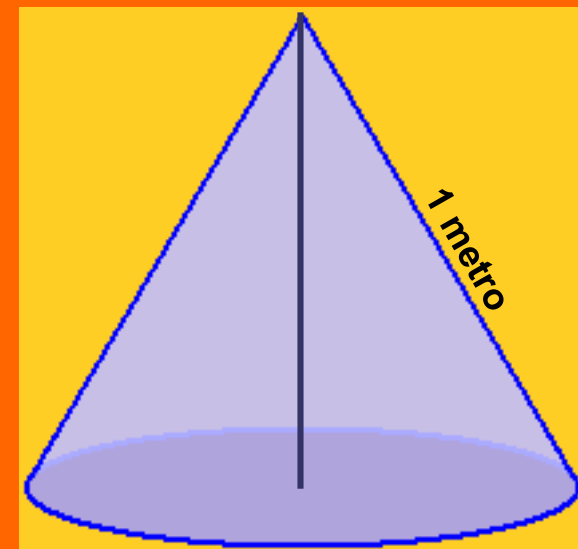
Avvio alla risoluzione

Posto:

altezza = x ($0 \leq x \leq 1$)

si ha che:

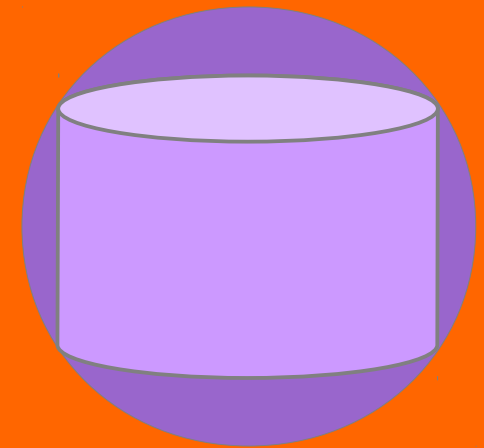
Volume = $\pi/3 (1-x^2) x$



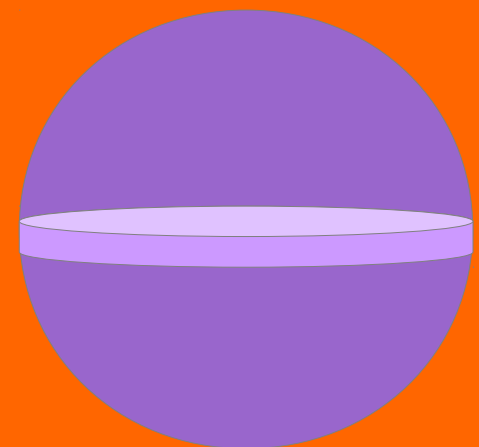
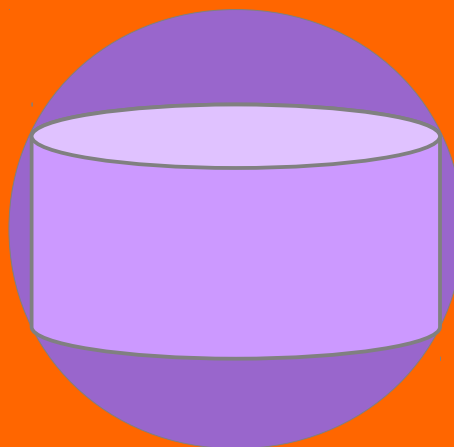
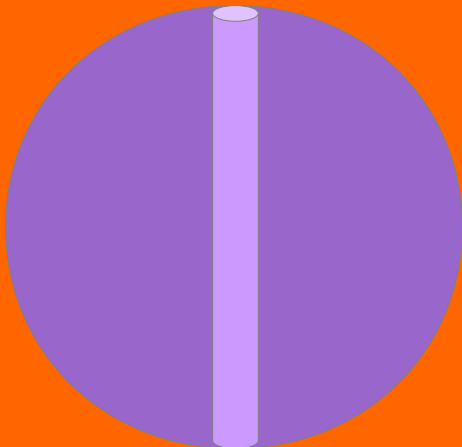
Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi assegnati all'Esame di Maturità Scientifica

Un serbatoio ha la capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Qual è la capacità in litri del serbatoio?



[Quesito 1 - Anno 2011]



Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi assegnati all'Esame di Maturità Scientifica

Si trovi il punto della curva $y=\sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4,0)$.

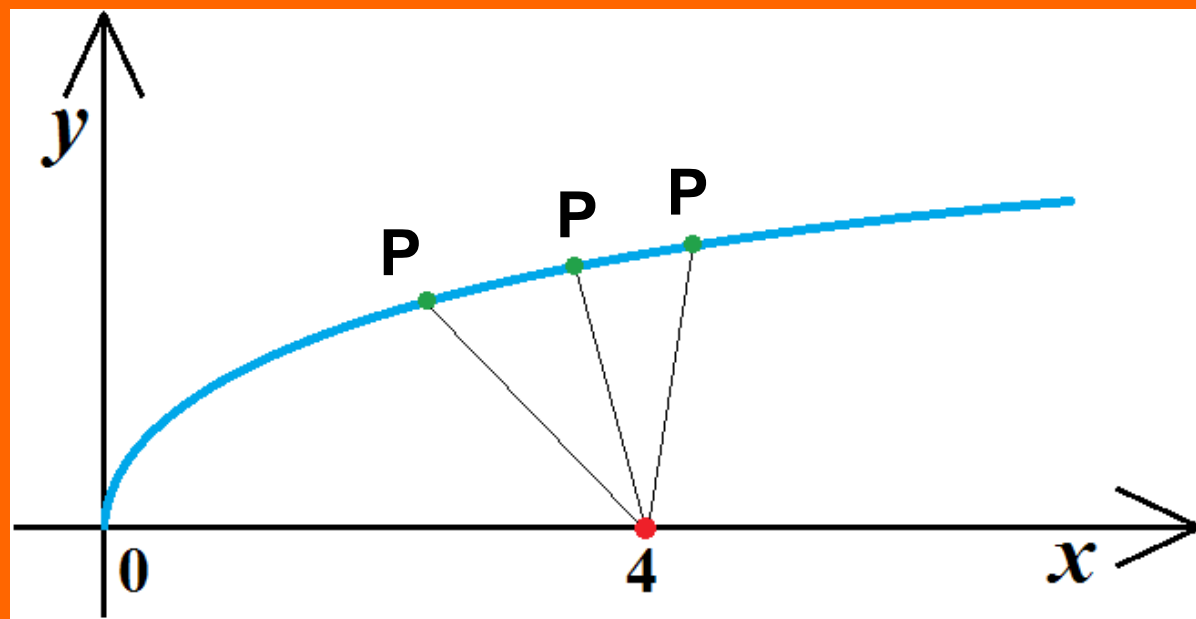
[Quesito 2 - Anno 2011]

Avvio alla risoluzione

$$P = (x, \sqrt{x}) \quad x \geq 0$$

$$A = (4, 0)$$

$$d(P, A) = \sqrt{(x - 4)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2}$$



Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi assegnati all'Esame di Maturità Scientifica

Fra tutte le casseruole di forma cilindrica aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo), qual è quella di volume massimo?

[Quesito 3 - Anno 2008]

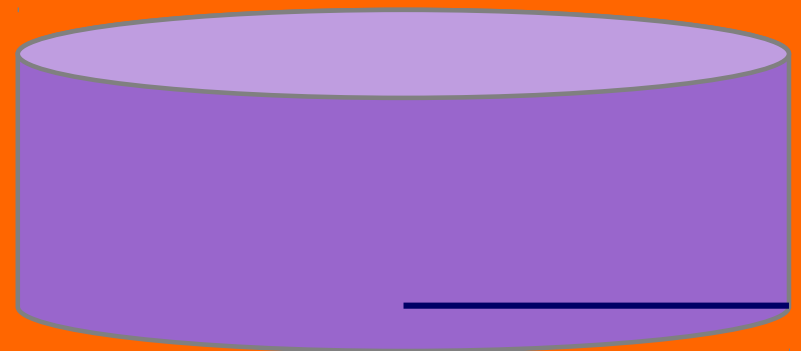
Avvio alla risoluzione

Posto:

raggio = x ($0 < x \leq \sqrt{S/\pi}$)

si ha che:

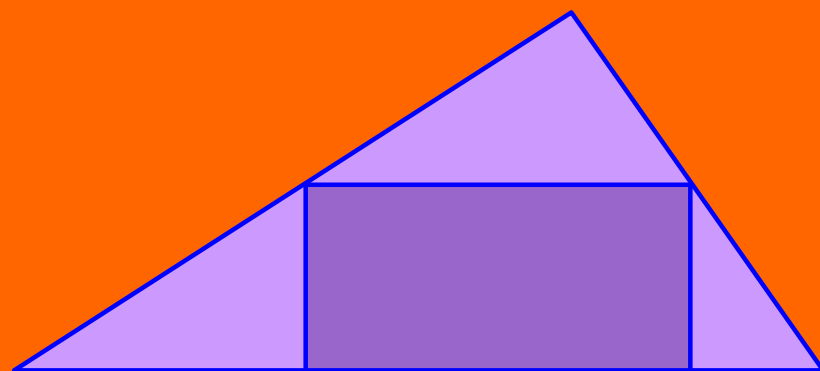
Volume = $\frac{1}{2} x (S - \pi x^2)$



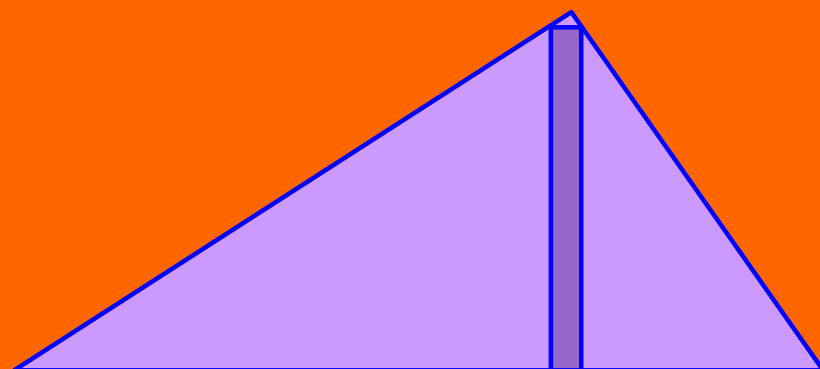
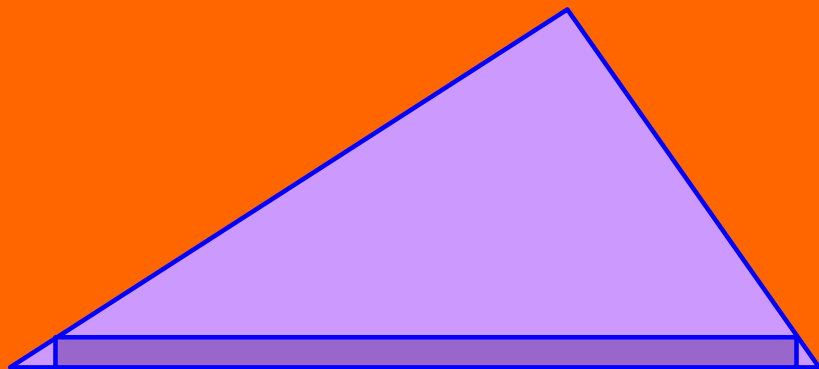
Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi assegnati all'Esame di Maturità Scientifica

E' dato un triangolo rettangolo con angoli acuti di 60 e 30 gradi. Fra tutti i rettangoli inscritti nel triangolo ed aventi un lato sull'ipotenusa determinare quello di area massima



[Da Problema 1 - Anno 2008]

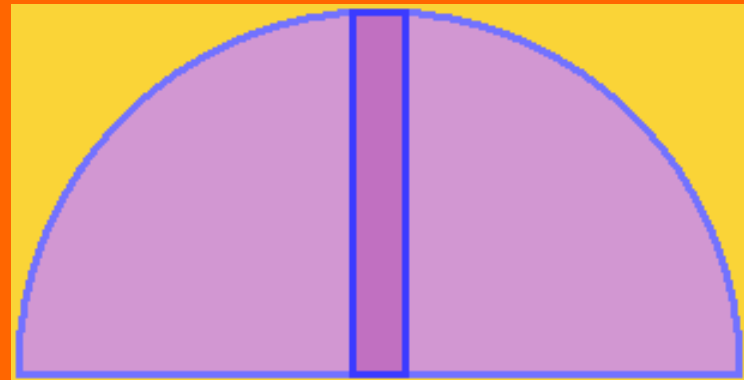
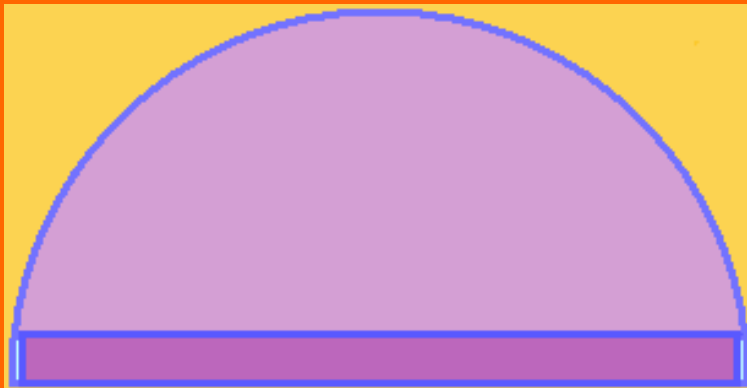
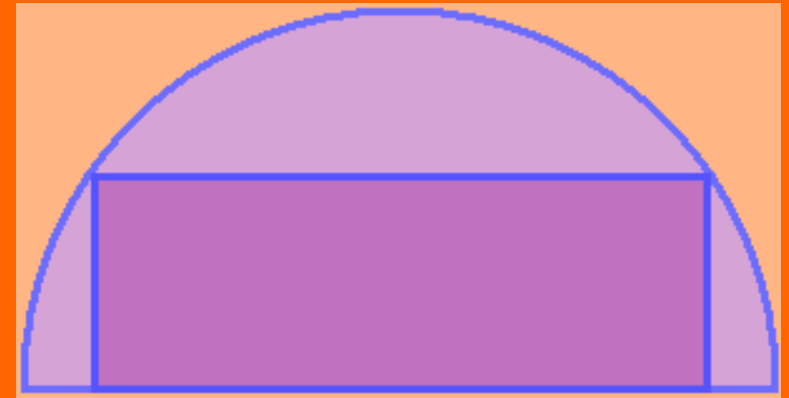


Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi assegnati all'Esame di Maturità Scientifica

***Fra tutti i rettangoli inscritti
in un dato semicerchio
determinare quello di area
massima***

[Da Problema 2 - Anno 2008]



Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi assegnati all'Esame di Maturità Scientifica

Una azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai mm, di una lattina?

[Quesito 6 - Anno 2014]

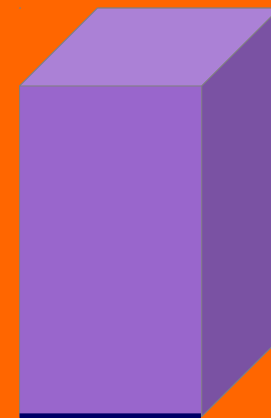
Avvio alla risoluzione

Posto:

lato base = x ($x > 0$)

si ha che:

Superficie = $2x^2 + 20/x$



La Natura è la più brava risolutrice dei problemi di massimo e minimo

In molti sistemi naturali si osserva la tendenza a minimizzare l'energia

“Nulla accade nell'universo che non faccia capo a qualche criterio di massimo o di minimo”

Così si esprimeva Eulero (XVIII secolo), sulla scia del principio aristotelico secondo cui *la natura sceglie sempre la via più facile*.



Leonhard Euler

La Natura è la più brava risolutrice dei problemi di massimo e minimo

Nell'alveare le celle
hanno una forma tale da
massimizzare gli spazi
riducendo al **minimo** il
consumo di cera



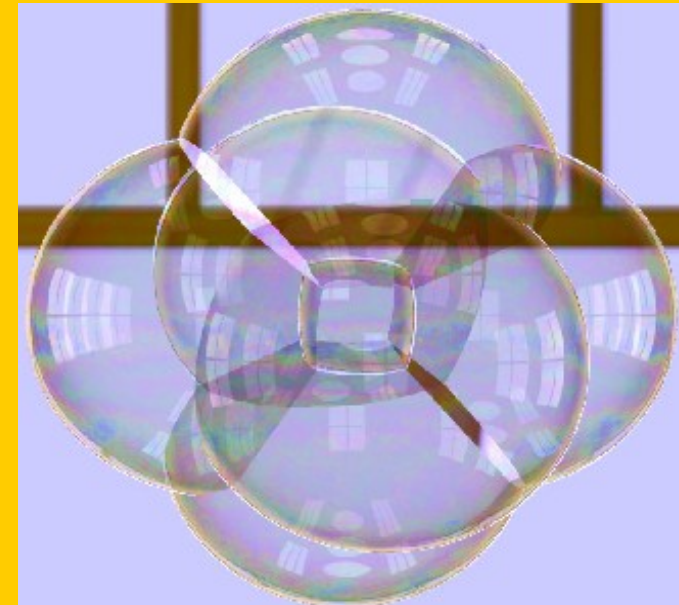
La Natura è la più brava risoltrice dei problemi di massimo e minimo

Le bolle di sapone
assumono forme tali
da rendere **minima** la
tensione superficiale



Fra tutte le superfici contenenti
un dato volume, quella sferica
ha area minima.

Nel caso
degli
agglomerati
di bolle, il
problema
è più
complesso



La Natura è la più brava risolutrice dei problemi di massimo e minimo

Le foglie delle piante si dispongono lungo il fusto assumendo una posizione tale da **massimizzare** l'esposizione alla luce, all'aria e all'acqua piovana



La fillotassi

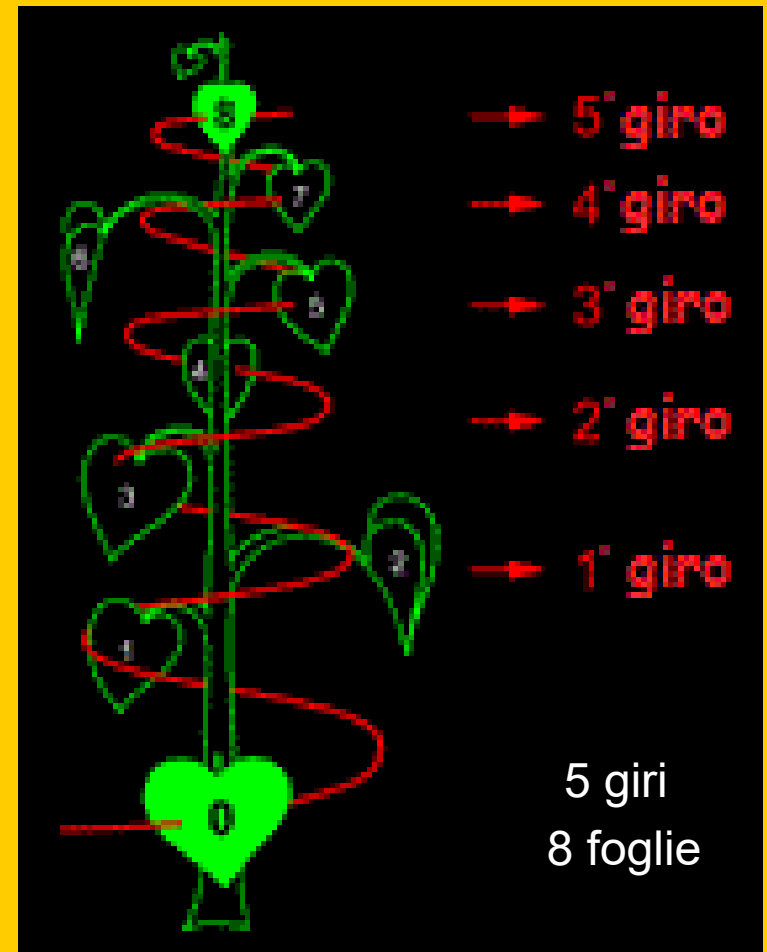
Partendo dalla foglia base, dopo **5** giri attorno al fusto si raggiunge la foglia sovrastante, che è la numero **8**.

Solitamente, i numeri che si incontrano nella fillotassi sono numeri che fanno parte della **successione di Fibonacci**:

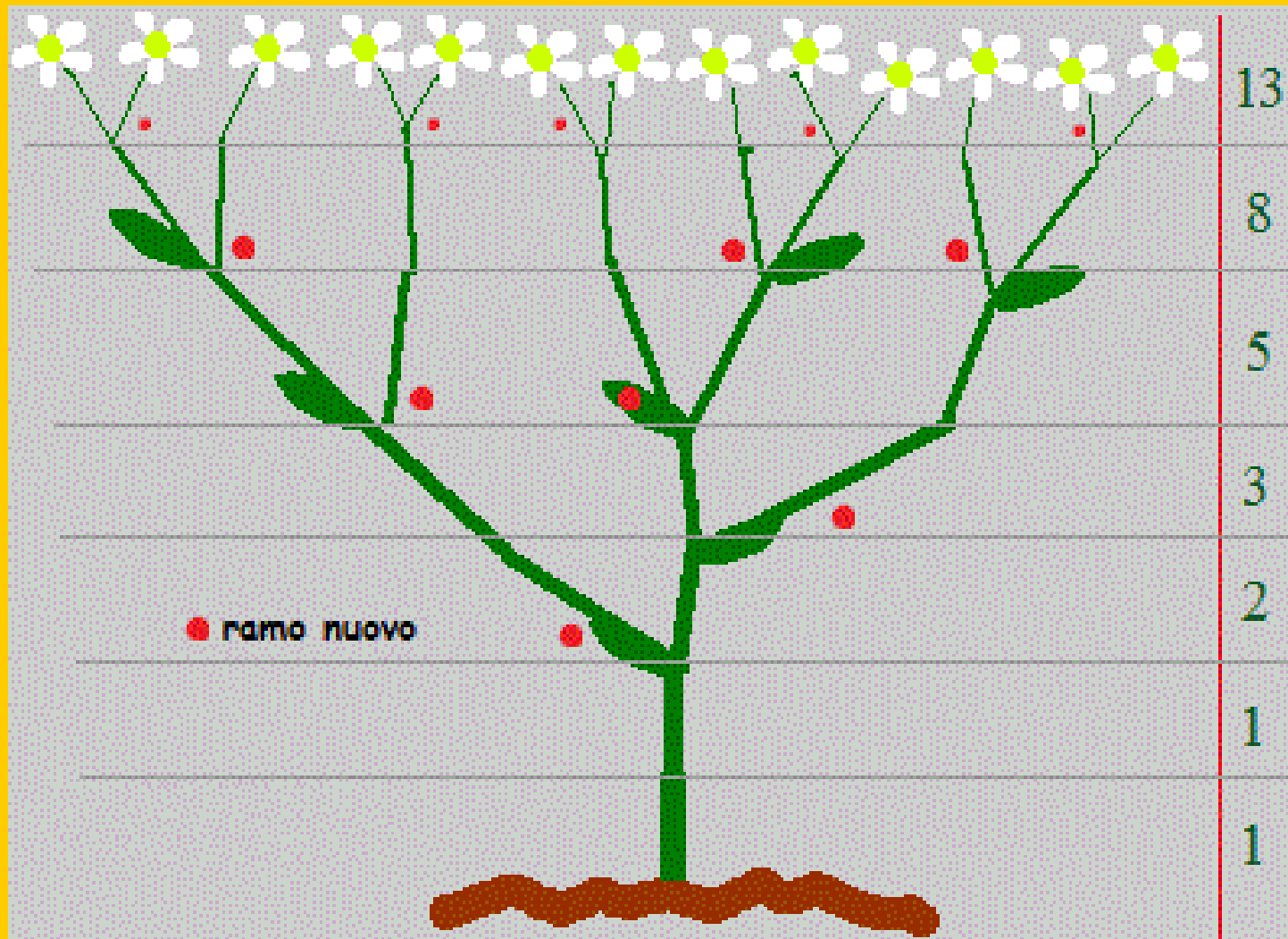
1-1-2-3-**5**-**8**-13-21-34-55-89-144-233-377-610

I termini F_n della successione soddisfano la regola:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$



La fillotassi



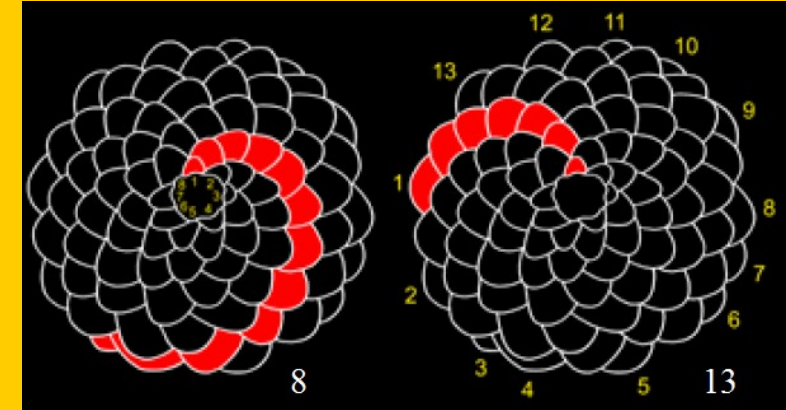
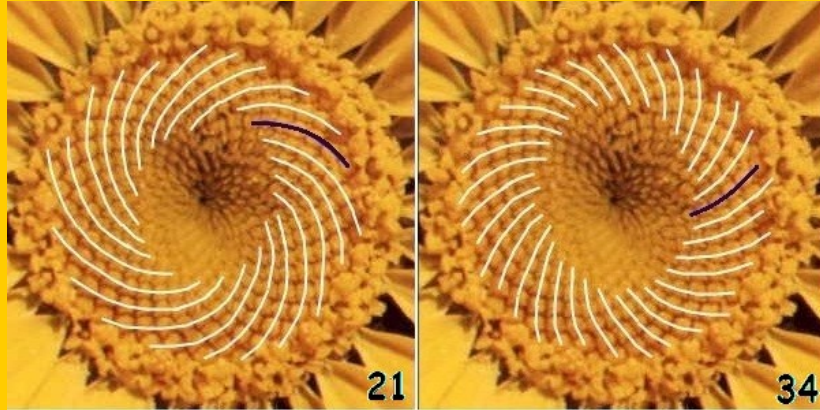
Ogni nuovo ramo che si viene a formare, dopo due settimane comincia a generare nuovi rametti, uno ogni settimana

La successione che si forma è ancora quella di Fibonacci

1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 89 - 144 - 243 - 377 - 610



La fillotassi



**Petali della margherita,
flosculi del girasole,
brattee dello strobilo,
scaglie dell'ananas:
i numeri di Fibonacci
sono presenti
dappertutto.**

**Uno studio statistico su
migliaia di piante ha
mostrato che oltre il 90% di
esse presenta una fillotassi
di tipo Fibonacci**



1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 89 - 144 - 243 - 377 - 610

LA SUCCESSIONE DI FIBONACCI

La successione di Fibonacci fu scoperta da Leonardo Pisano (1170-1240) come soluzione del problema dei conigli



Leonardo Pisano

Il problema dei conigli

In una conigliera viene introdotta nel mese di gennaio una coppia di conigli.

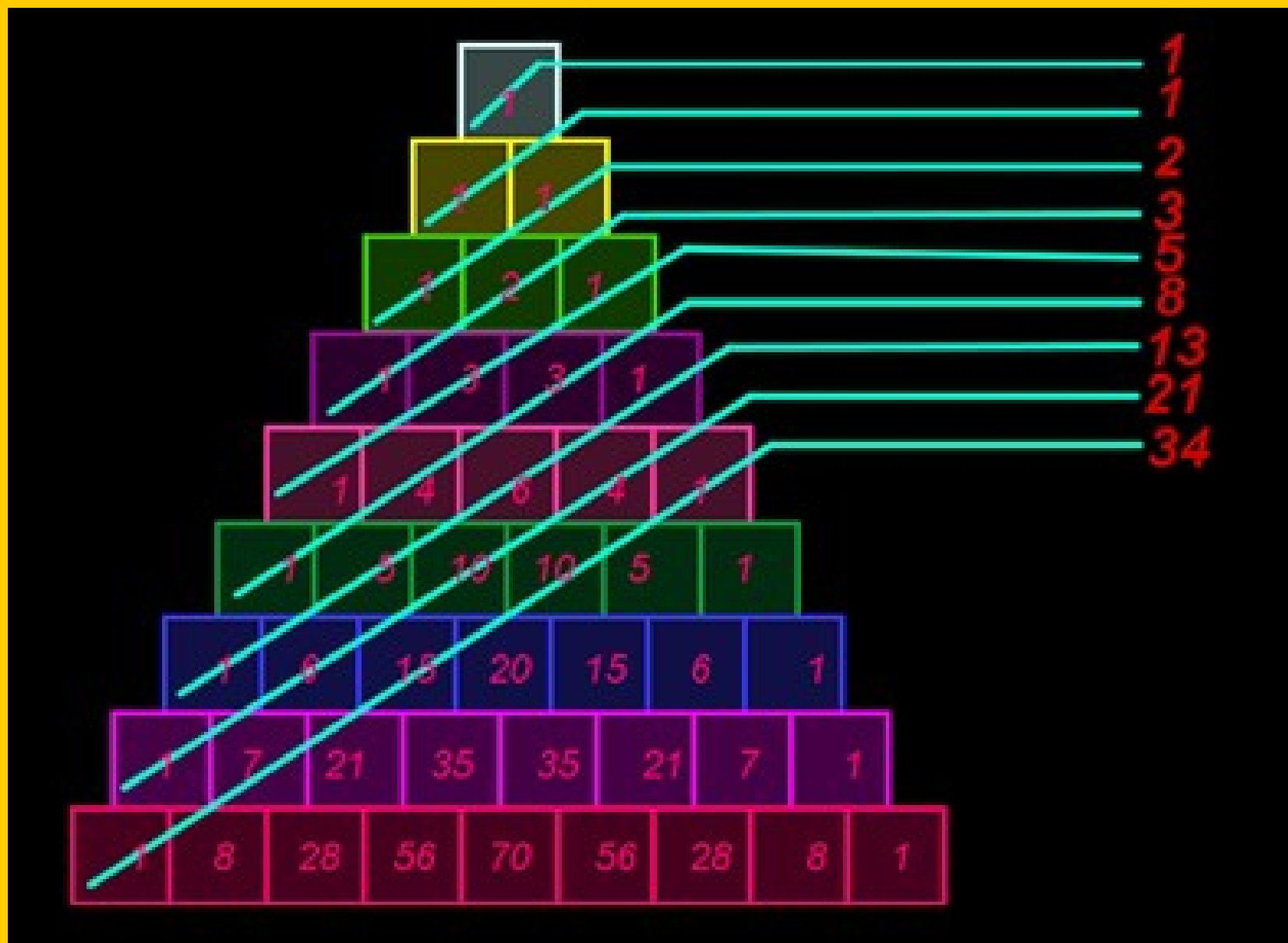
A partire dal mese di marzo questa genera una coppia di conigli ogni mese.

Le nuove coppie, anche esse dopo due mesi, generano una coppia al mese.

Quante coppie di conigli troveremo nella conigliera alla fine dell'anno?

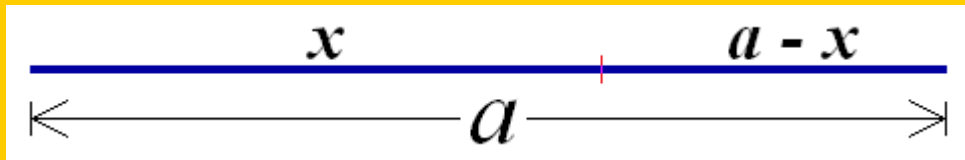
Mesi	Evoluzione nei primi dodici mesi	Totale coppie
Gennaio		1
Febbraio		1
Marzo	 Nasce una nuova coppia	2
Aprile	 diventa adulta	3
Maggio	 genera una prima coppia	5
Giugno	 genera una seconda coppia	8
Luglio		13
Agosto		21
Settembre		34
Ottobre		55
Novembre		89
Dicembre		144

I numeri di Fibonacci nel triangolo di Tartaglia



La successione di Fibonacci e il numero d'oro

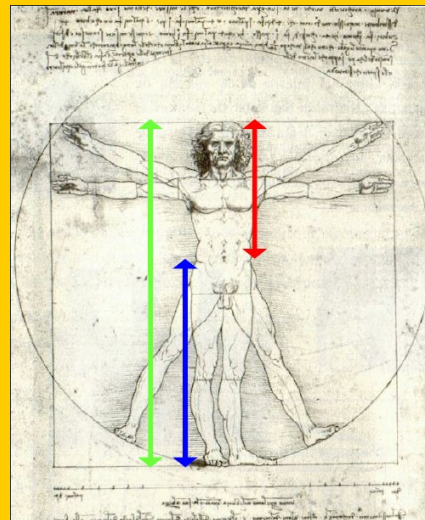
il segmento a e la sua sezione aurea x



$$a : x = x : a - x$$

Il rapporto fra il
segmento a e la
sua sezione aurea x
è chiamato *numero d'oro*

$$\Phi := \frac{a}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



L'uomo vitruviano
(Leonardo)

$$\Phi \cong 1.6180339887498948482045868343656$$

1
1
2
3
5
8
13
21
34
55
89

$$F_2/F_1 = 1/1 = 1,000....$$

$$F_3/F_2 = 2/1 = 2,000....$$

$$F_4/F_3 = 3/2 = 1,500....$$

$$F_5/F_4 = 5/3 = 1,666....$$

$$F_6/F_5 = 8/5 = 1,600....$$

$$F_7/F_6 = 13/8 = 1,625....$$

$$F_8/F_7 = 21/13 = 1,615....$$

$$F_9/F_8 = 34/21 = 1,619....$$

$$F_{10}/F_9 = 55/34 = 1,617....$$

$$F_{11}/F_{10} = 89/55 = 1,618....$$

.....

.....

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$$

Questa formula collega i numeri di
Fibonacci con la sezione aurea

Problema assegnato all'Esame di Maturità Scientifica

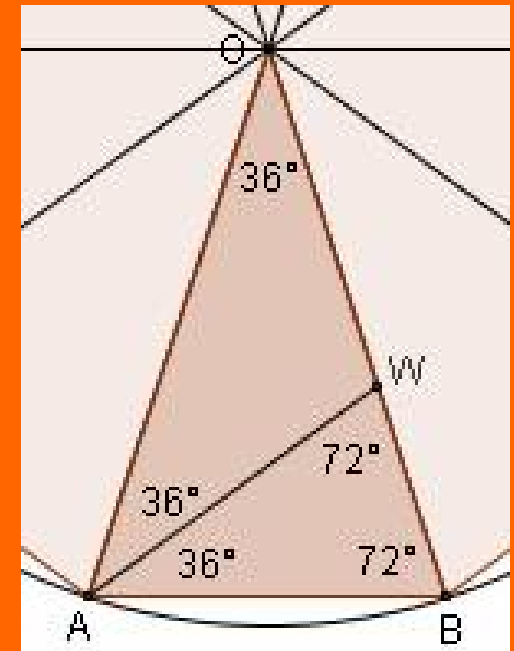
“Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $\sin(\pi/10) = (\sqrt{5}-1)/4$.”



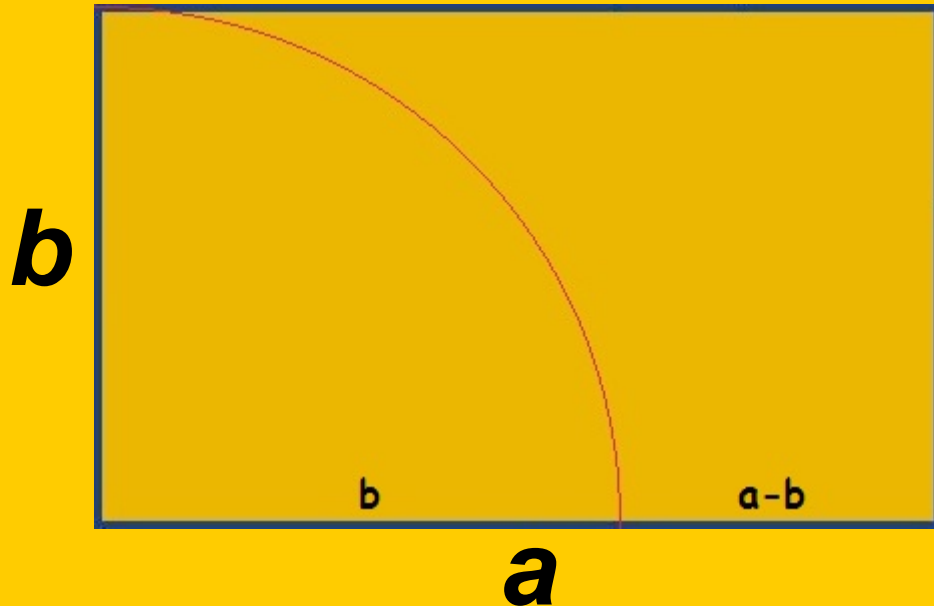
Risoluzione

Il triangolo isoscele ha angoli di $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$; quindi la bisettrice in A stacca in basso un triangolo simile; dunque $r : l = l : r - l$. Con ciò è provato che l è sezione aurea di r , ossia $l/r = (\sqrt{5}-1)/2$.

In base al teorema della corda si ha che $r \sin(\pi/10) = l/2$, e da ciò segue la tesi.

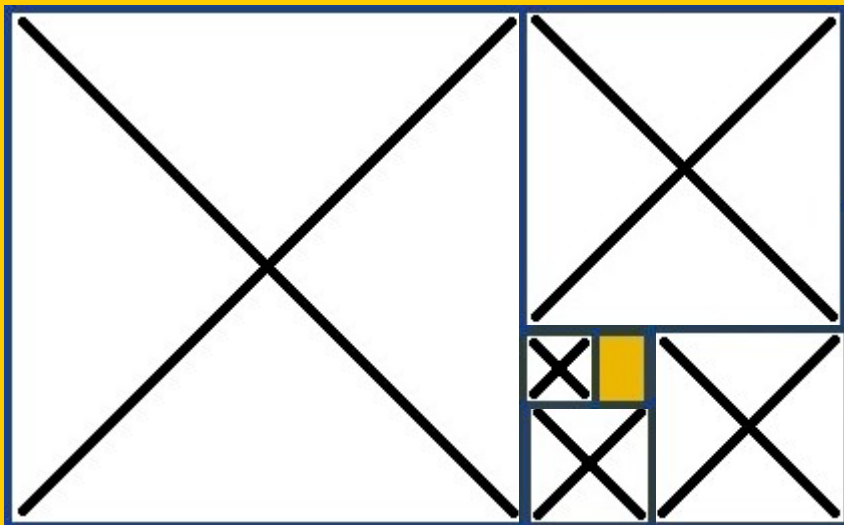


Il rettangolo aureo



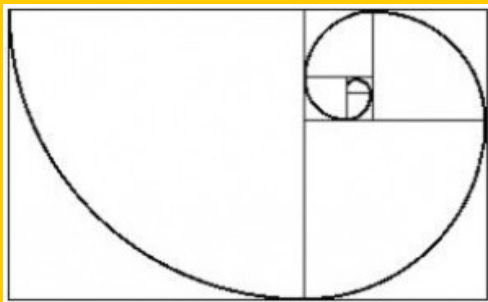
Il rettangolo aureo è quello in cui l'altezza è uguale alla sezione aurea della base, in modo che il rapporto fra la base e l'altezza sia uguale al numero d'oro.

$$a : b = b : a - b$$

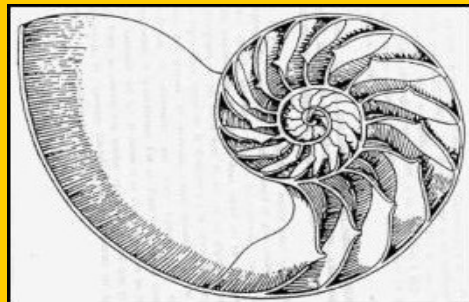


Se dal rettangolo aureo cancelliamo il quadrato costruito sul lato minore, otteniamo un rettangolo simile al primo, cioè un altro rettangolo aureo. E così di seguito.

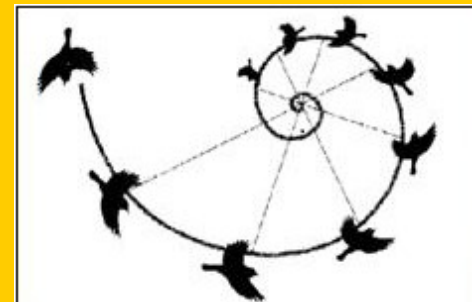
Il rettangolo aureo



Unendo due vertici opposti in ogni quadrato si ottiene una curva assai prossima alla **spirale logaritmica**. La curva si allunga mantenendo sempre la stessa forma.



Molti molluschi, come il **nautilus**, hanno la conchiglia a forma di spirale logaritmica: la conchiglia cresce ma la forma non cambia.

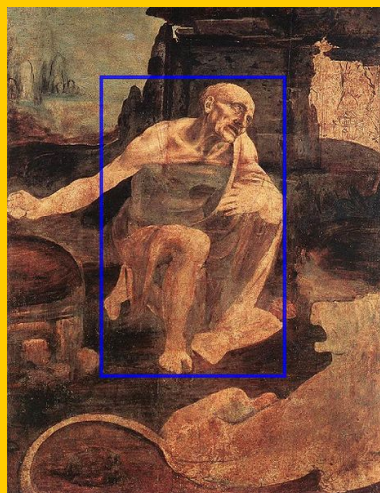


Il **falco** si avvicina alla preda seguendo una spirale logaritmica: così mantiene la testa dritta mentre guarda la preda con il suo angolo di vista ottimale.

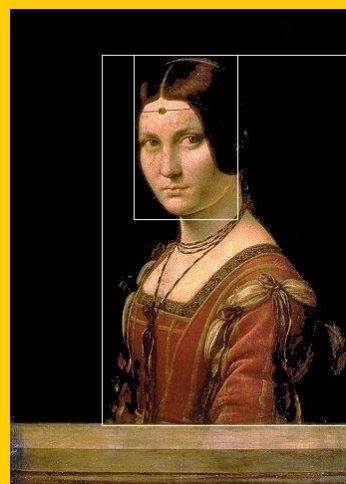
E' diffusa l'idea che il rettangolo aureo sia il "**rettangolo più bello**"



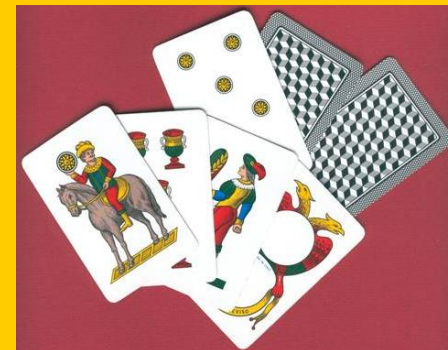
Partenone
(Fidia)



San Girolamo
(Leonardo)



La belle feronnière
(Leonardo)



I fogli da scrittura

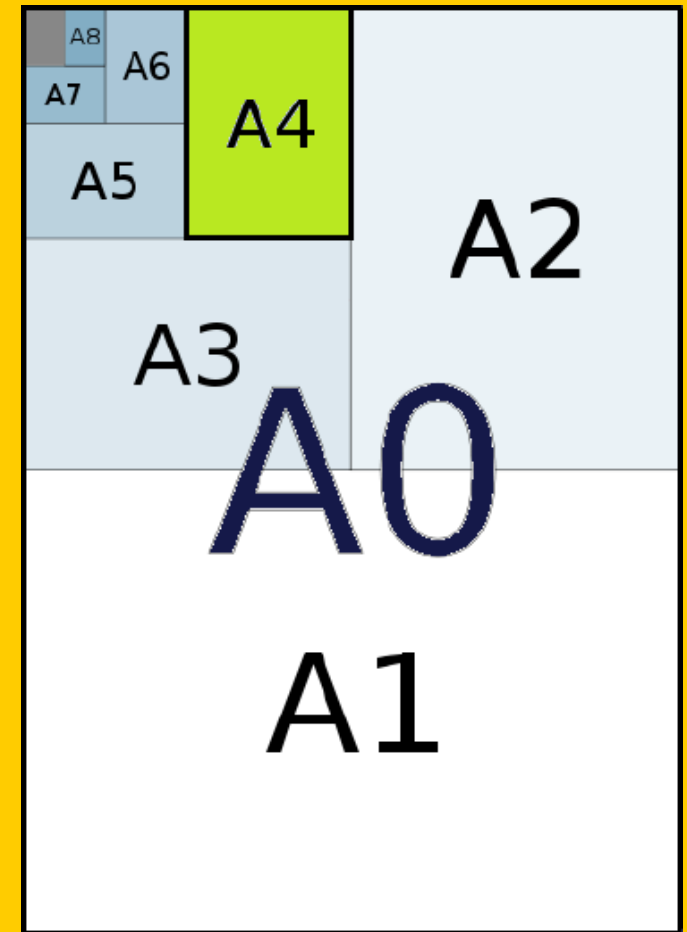
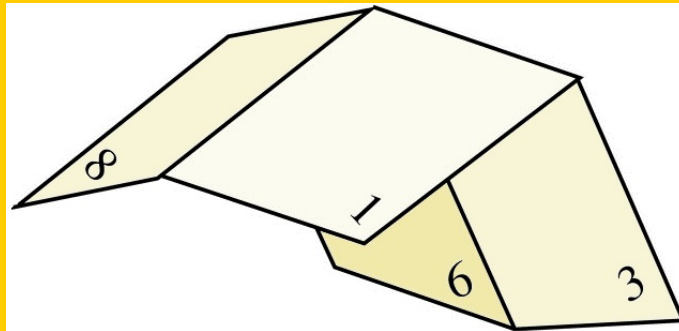
Il foglio A4 è un rettangolo aureo?

Nel caso dei fogli di carta, il criterio è un altro: piegando in due parti uguali ad esempio il foglio A0, si deve ottenere un rettangolo simile, che dovrà essere il foglio A1.

Questa condizione si realizza solo se il rapporto fra le dimensioni del foglio è uguale a $\sqrt{2}$.

L'ISO 216 è lo standard dei formati di carta usati in numerosi paesi per usi tipografici.

Si stampano più pagine di un libro su un foglio molto grande, che poi viene ripiegato più volte per ottenere i fascicoli di cui sarà composto il libro.



Anche in questo caso si è trattato di risolvere un problema di ottimizzazione

Problemi assegnati all'Esame di Maturità Scientifica

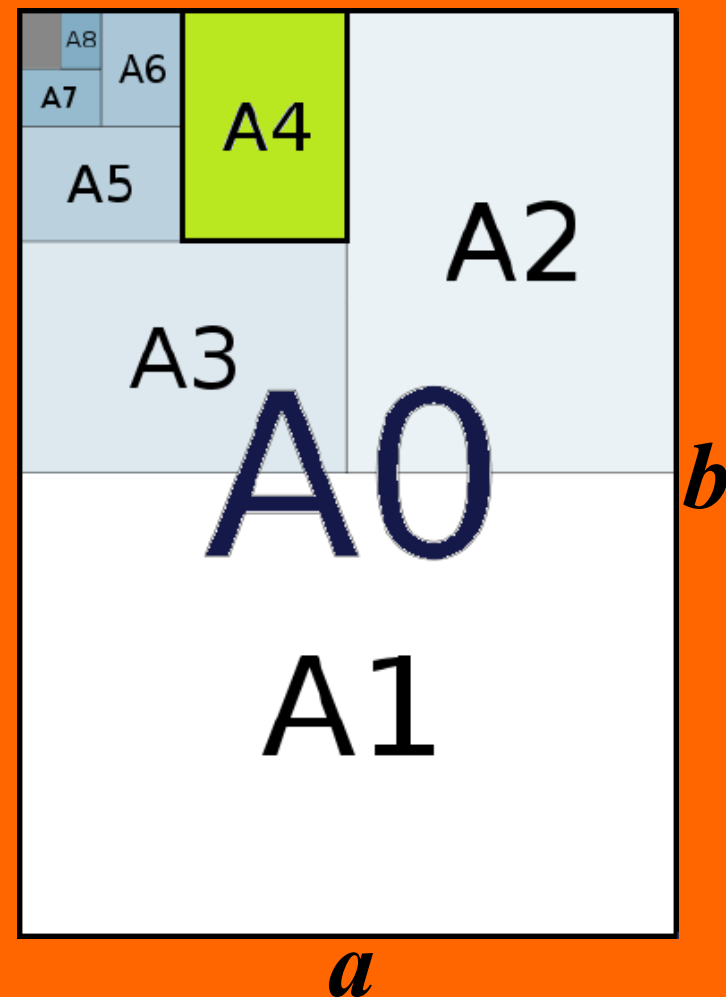
“Un foglio rettangolare, di dimensioni a e b , ha area 1 mq e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza. Quali sono le misure di a e b ?”

[Quesito 7 - Anno 2013]

Risoluzione

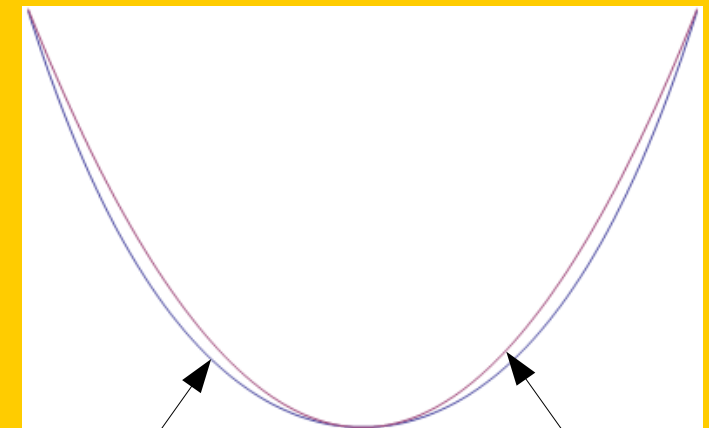
$$a : b = b/2 : a$$

Ne consegue che il rapporto b/a è uguale a $\sqrt{2}$. L'altro dato è che $ab=1$.



La Natura è la più brava risolutrice dei problemi di massimo e minimo

La forma che assume una catenella tenuta sospesa ai suoi due estremi è quella che corrisponde al minimo energetico. La curva è detta **catenaria**



catenaria - **parabola**

La catenaria

La curva è chiamata anche *velaria*, perché ha la forma della sezione orizzontale della vela gonfiata dal vento.

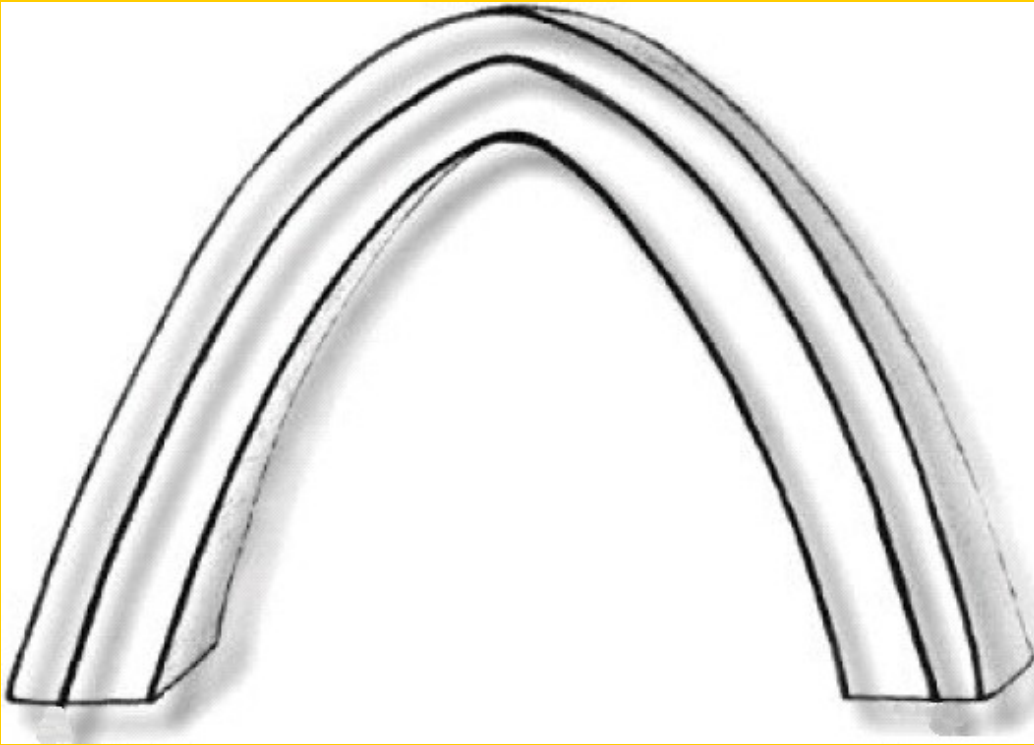


Equazione della catenaria

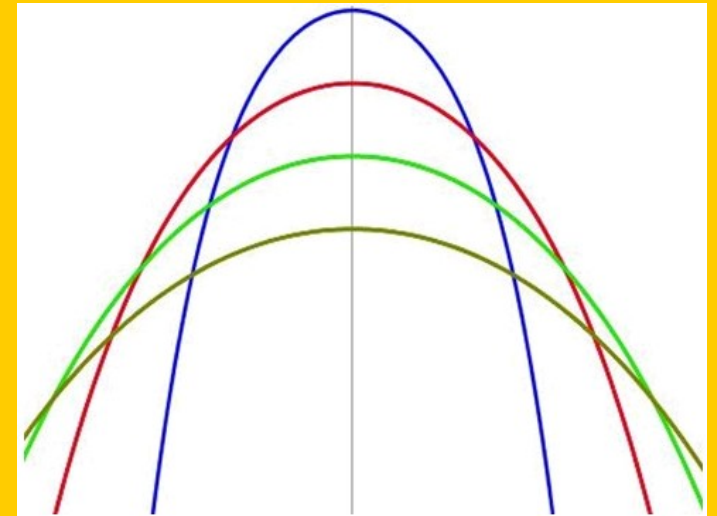
$$y = a \cosh \frac{x}{a} = a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$$

$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995.....$

L'arco catenario



**L'arco catenario
ha la forma di una
catenaria capovolta**



L'arco catenario

Nell'*arco catenario*, o *arco equilibrato*, il carico è distribuito in modo uniforme. Inoltre le linee di forza lungo le quali si scarica il peso seguono la curvatura, rimanendo all'interno della struttura.



arco catenario

Invece nell'*arco romano* le linee di forza spingono verso l'esterno in prossimità della base, tanto da rendere necessari opportuni contrafforti.



arco romano

L'arco catenario

L'uomo ha sfruttato le proprietà dell'arco catenario per costruire cupole, ponti e viadotti



Brunelleschi – Santa Maria del Fiore – Firenze



Robert Maillart – Ponte Salginatobel - Svizzera



Gustave Eiffel – Viadotto di Garabit - Francia

L'arco catenario

Molti altri architetti hanno utilizzato l'arco catenario nelle loro opere



Cattedrale di St. Paul a Londra



Gateway Arch a St. Luis



L'arco catenario

L'architetto spagnolo **Gaudì** ne ha fatto un uso sistematico



Sagrada Família



Casa Batllò



Progetto Lauree Scientifiche

Maglie, 18 gennaio 2017

OTTIMIZZAZIONE E DINTORNI

Cosimo De Mitri

- FINE PRIMA PARTE -



Progetto Lauree Scientifiche

Liceo Scientifico “Leonardo da Vinci”
Maglie, 18 gennaio 2017

OTTIMIZZAZIONE E DINTORNI

Cosimo De Mitri

- SECONDA PARTE -

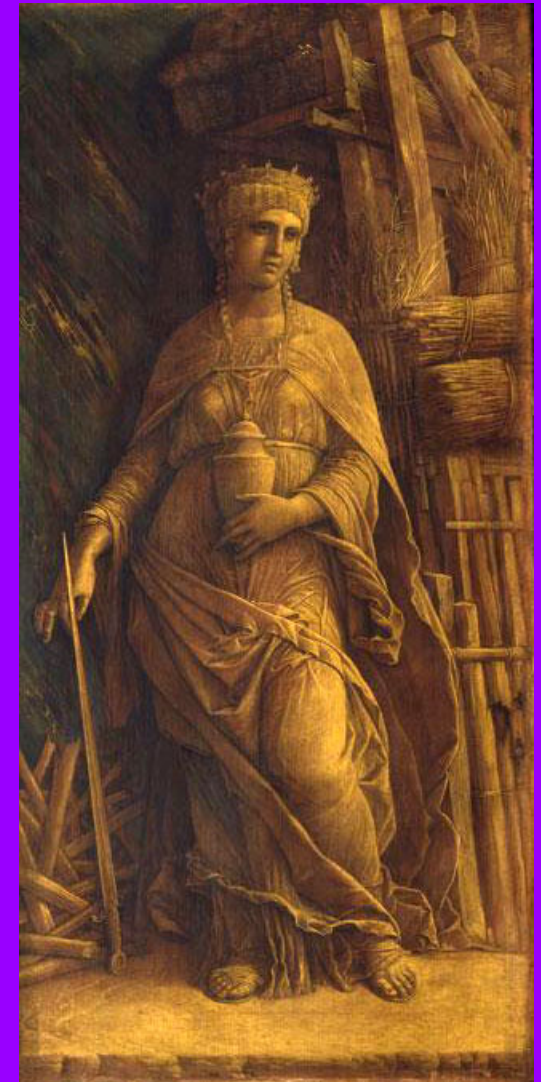


L'ottimizzazione nella storia e nella leggenda

Il primo problema di ottimizzazione è contenuto nella leggenda della fondazione dell'antica Cartagine da parte di Didone, raccontata nel I libro dell'Eneide.

Nell'880 a.C. la regina fenicia Didone, fuggita da Tiro insieme a pochi fedeli, approdò sulle coste settentrionali dell'Africa. Qui chiese a Iarba, re dei Getuli, un appezzamento di terreno su cui costruire una nuova città.

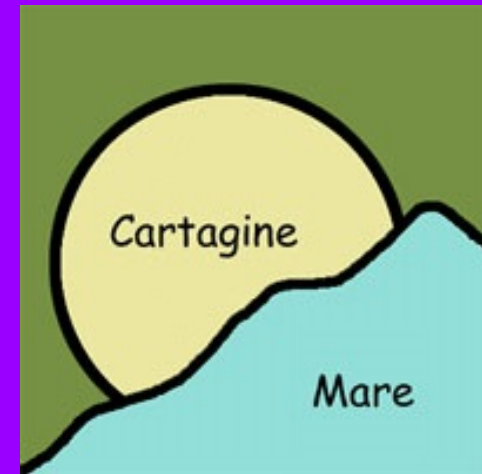
Il re, in tutta risposta, le offrì una pelle di toro, dicendole che poteva appropriarsi di tanto terreno quanto poteva comprenderne con quella pelle (“quanto cerchiar di bue potesse un tergo”).



L'ottimizzazione nella storia e nella leggenda



*L'astuta Didone accettò la sfida.
Fece tagliare la pelle in tante strisce
sottili ed ottenne una corda con la
quale riuscì a delimitare una vasta
zona, a forma di semicerchio,
affacciata sul mare.*



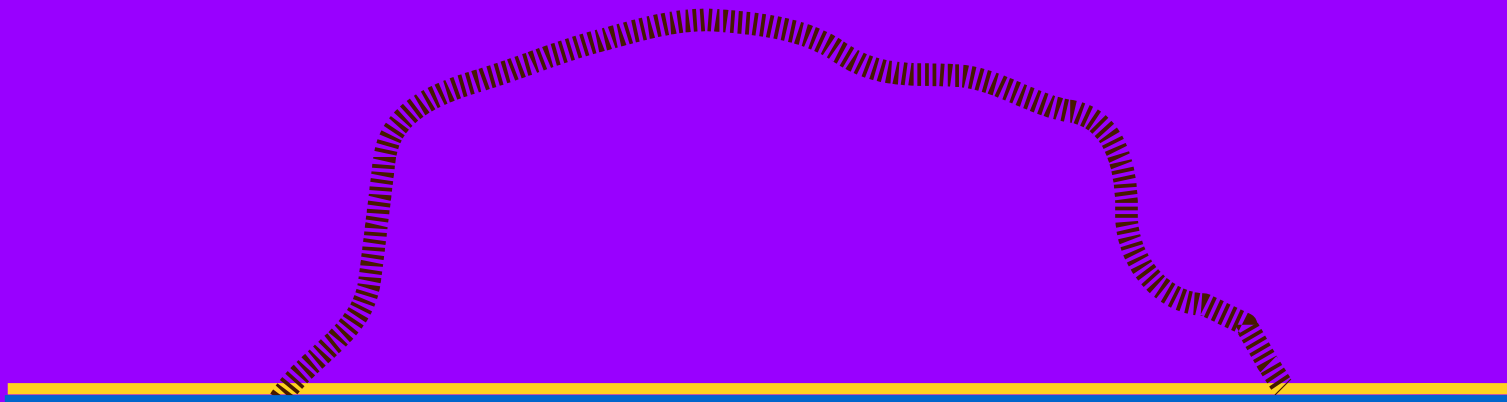
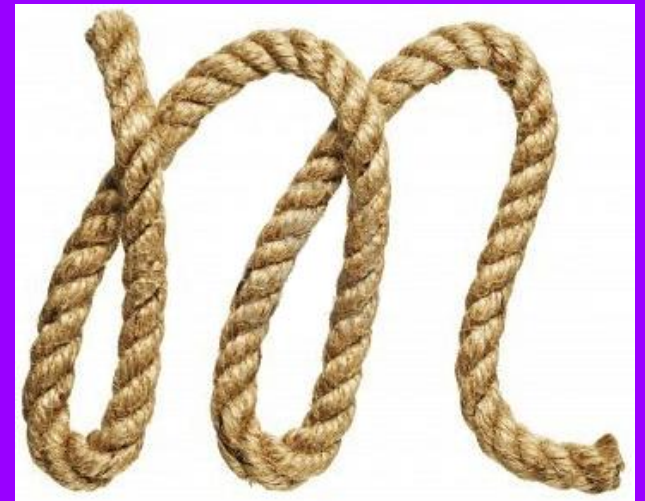
**E' stato calcolato che
in questo modo si po-
trebbe verosimilmente
comprendere un semi-
cerchio equivalente per
estensione a 15 campi
di calcio.**



Il problema di Didone

Il problema di Didone è un problema di ottimizzazione:

Fra tutte le curve piane di lunghezza assegnata ed aventi i due estremi su una retta, determinare quella che racchiude la superficie di area massima



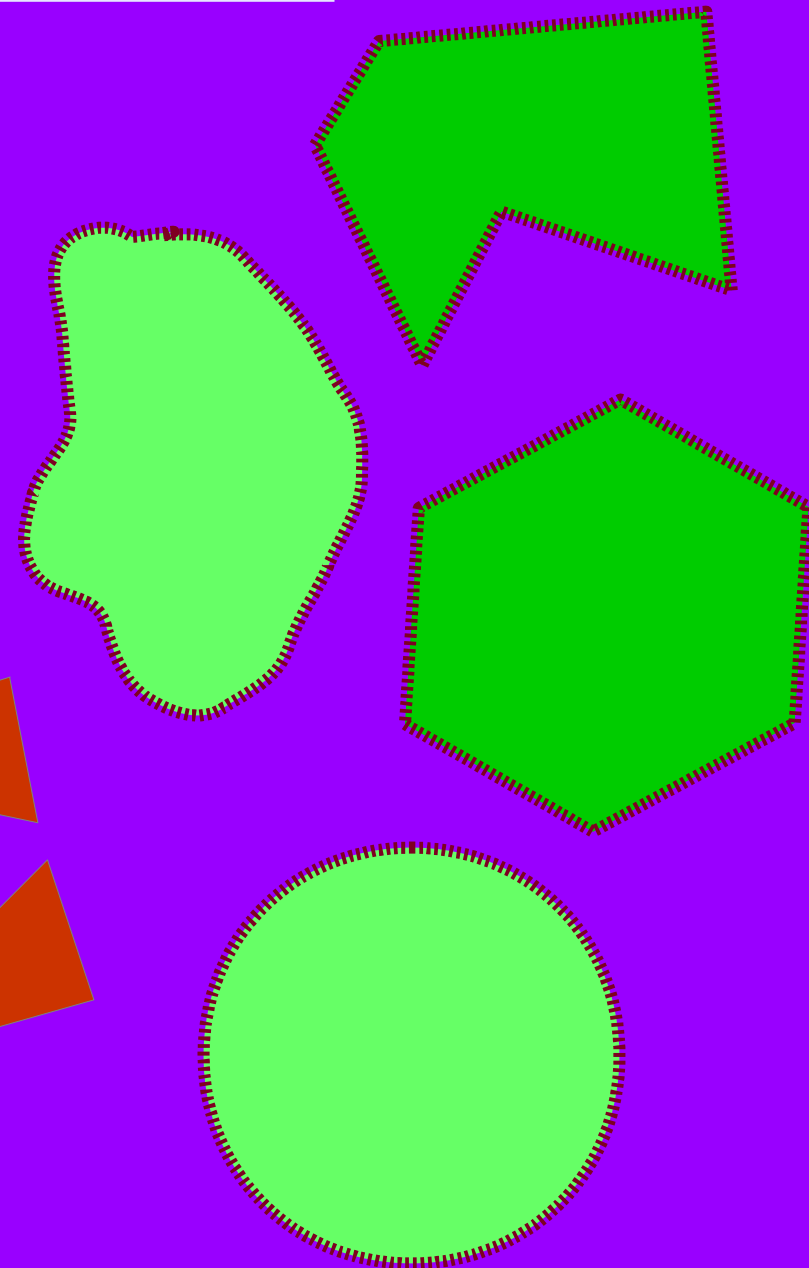
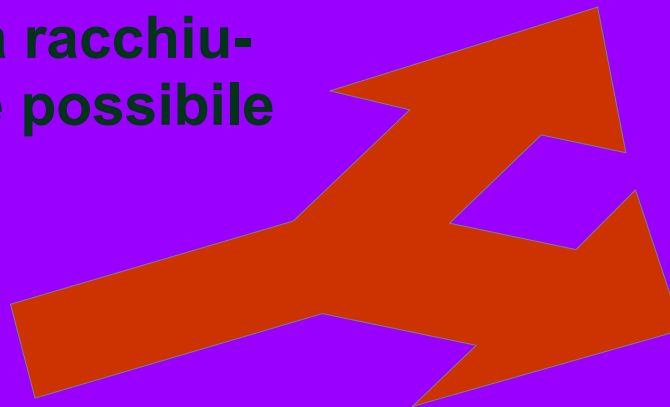
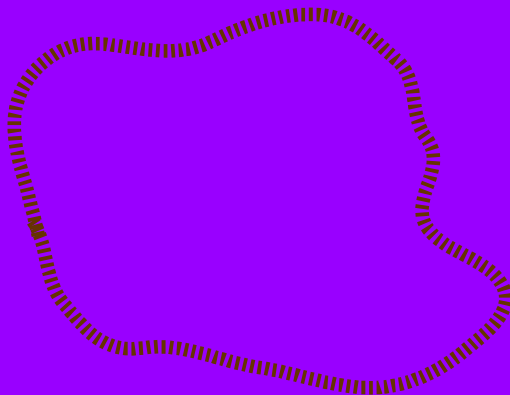
L'ottimizzazione nella storia

Il problema isoperimetrico

Il problema di Didone è equivalente al famoso *problema isoperimetrico*:

Fra tutte le figure piane di egual perimetro, anche non poligonali, determinare quella avente area massima

Ad esempio, si dispone di una corda lunga un metro e le si deve dare una forma tale da racchiudere quanta più area è possibile



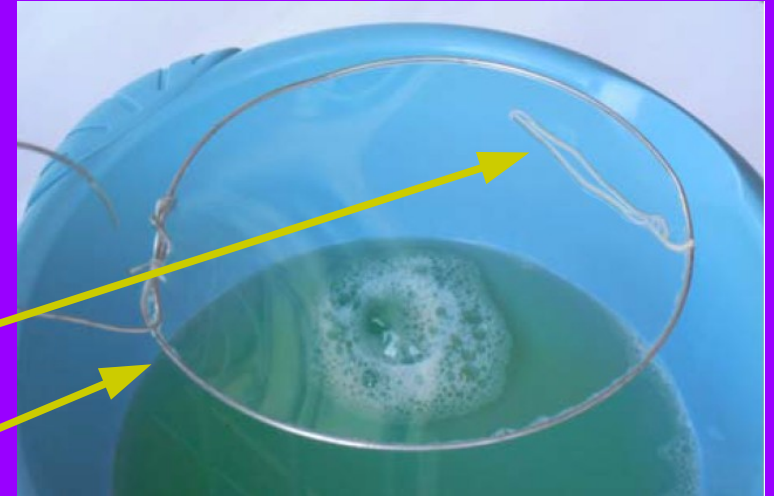
Il problema isoperimetrico

Ricordiamo il problema

Fra tutte le figure piane di egual perimetro, determinare quella avente area massima

**La natura conosce
bene la soluzione**

Filo di cotone
Filo metallico



Che succede quando viene rotta la lamina saponosa racchiusa nel cappio di cotone?

La lamina esterna, ritraendosi, tira il filo di cotone, che si allarga fino a contenere quanta più area è possibile. E la forma che assume il buco è proprio quella del cerchio.



L'ottimizzazione nella storia

Il problema isoperimetrico

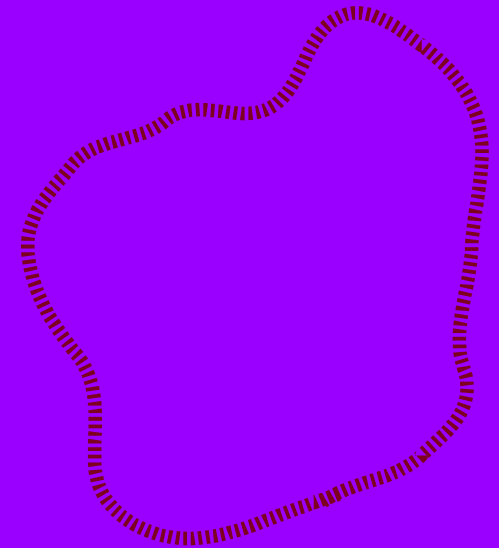
I greci antichi avevano intuito che la soluzione del problema isoperimetrico è il cerchio.

Ma per avere le prime dimostrazioni rigorose bisogna attendere i primi anni del XX secolo.

Un risultato importante era stato raggiunto da Jakob Steiner intorno alla metà del XIX secolo; ma successivamente ci si accorse che la sua dimostrazione era incompleta.

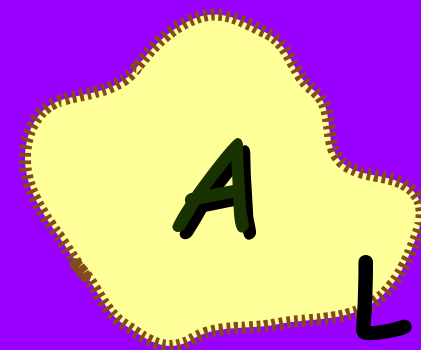
Per giunta la risoluzione del problema aveva bisogno di continui aggiornamenti, mano a mano che le nuove teorie sulla misura rendevano più raffinati i concetti di area e di perimetro.

La teoria della misura di Lebesgue venne formulata solo a partire dal 1902. Essa consentiva di attribuire un'area anche a figure molto bizzarre, e ciò rendeva necessario un adeguato aggiornamento anche del concetto di perimetro.



L'ottimizzazione nella storia

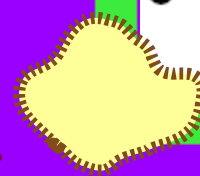
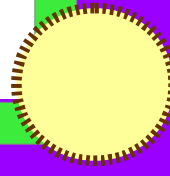
Il problema isoperimetrico



Le dimostrazioni del problema isoperimetrico sono basate sulla *disuguaglianza isoperimetrica*.

Si tratta di stabilire che l'area A che si può racchiudere con una corda di lunghezza L non può superare quella del cerchio racchiuso dalla stessa corda.

La differenza tra il suddetto valore che si presume invalicabile e l'area della figura realizzata prende il nome di *deficit isoperimetrico*


$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}$$


$$\delta = \frac{L^2}{4\pi} - A$$

$\pi = 3,141592653589793238462643383279502884197169399375105.....$

A proposito di π

UNA PARENTESI ESTETICA

La formula più bella

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Formula di Eulero

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

oppure

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

definizione di e

$$\pi = \frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}}$$

definizione di π

$$i = \sqrt{-1}$$

definizione di i

La formula di Eulero, mettendo in relazione le cinque costanti numeriche $e - i - \pi - 0 - 1$ unisce tra loro anche le varie fasi della storia della matematica: si inizia con il numero uno, presente in tutte le epoche storiche; si prosegue con il pi greco della geometria greca, e poi con lo zero della fase indiana; infine si arriva al rinascimento, che è l'epoca dell'unità immaginaria e della costante di Nepero.

Numeri e Numeri

razionali

I numeri *razionali* sono quelli che possono essere trasformati in frazione (rapporto tra interi)

intero

$$5 = \frac{5}{1}$$

decimale finito

$$7,23 = \frac{723}{100}$$

decimale illimitato periodico

$$8,6\overline{34} = \frac{8634 - 86}{990}$$

irrazionali

I numeri che non possono essere trasformati in frazione si dicono *irrazionali*

decimale illimitato aperiodico

$$\sqrt{2} = 1,4142135..... = \cancel{\frac{m}{n}}$$

decimale illimitato aperiodico

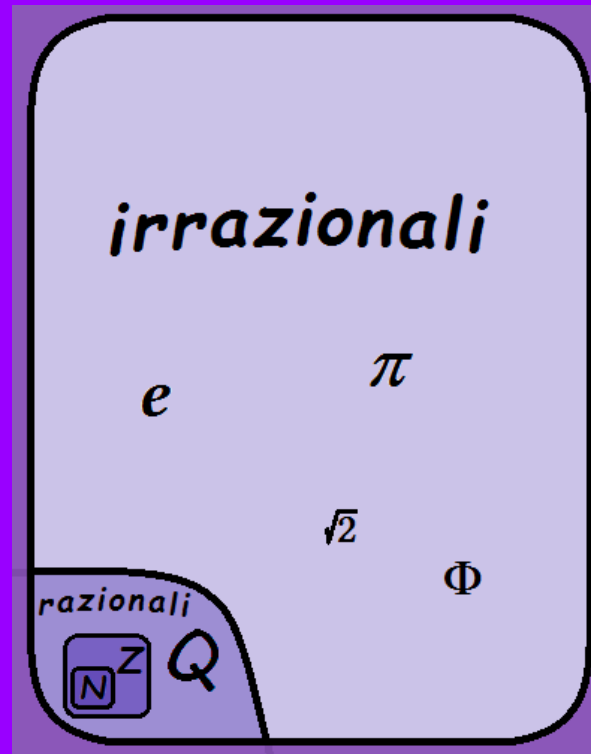
$$\Phi = 1,6180339..... = \cancel{\frac{m}{n}}$$

decimale illimitato aperiodico

$$e = 2,7182818..... = \cancel{\frac{m}{n}}$$

decimale illimitato aperiodico

$$\pi = 3,1415926..... = \cancel{\frac{m}{n}}$$

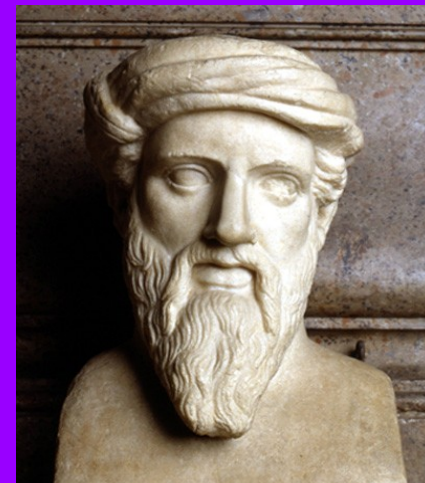


Razionali e Irrazionali

Pitagora e i suoi seguaci attribuivano ai numeri un'essenza divina.

L'universo numerico conosciuto al tempo di Pitagora (VI secolo a.C.) era costituito dai soli numeri razionali.

Fu proprio uno dei pitagorici, Ippaso da Metaponto, il primo ad accorgersi dell'insufficienza di quell'universo numerico.



Egli scoprì che, dato un quadrato, nessun sottomultiplo del lato poteva essere contenuto un numero esatto di volte nella diagonale (nessuna n -ma parte del lato entrava un numero esatto m di volte nella diagonale).

In altri termini, i numeri noti - m/n - non erano in grado di esprimere il rapporto fra la diagonale e il lato del quadrato.

La scoperta fu una sventura per la scuola pitagorica, tanto che fu vietato divulgarne la notizia.

Ippaso da Metaponto trasgredì l'ordine. Per questo fu espulso e condannato a morire annegato. Fuggì per mare, ma la nave affondò ed egli morì nel naufragio.



irrazionali

$$\sqrt{2}$$

1.4142135623 7309504880 1688724209 6980785696 7187537694 8073176679 7379907324
7846210703 8850387534 3276415727 3501384623 0912297024 9248360558 5073721264
4121497099 9358314132 2266592750 5592755799 9505011527 8206057147 0109559971
6059702745 3459686201 4728517418 6408891986 0955232923 0484308714 3214508397
6260362799 5251407989 6872533965 4633180882 9640620615 2583523950 5474575028
7759961729 8355752203 3753185701 1354374603 4084988471 6038689997 0699004815
0305440277 9031645424 7823068492 9369186215 8057846311 1596668713 0130156185
6898723723 5288509264 8612494977 1542183342 0428568606 0146824720 7714358548
7415565706 9677653720 2264854470 1585880162 0758474922 6572260020 8558446652
1458398893 9443709265 9180031138 8246468157 0826301005 9485870400 3186480342
1948972782 9064104507 2636881313 7398552561 1732204024 5091227700 2269411275
7362728049 5738108967 5040183698 6836845072 5799364729 0607629969 4138047565
4823728997 1803268024 7442062926 9124859052 1810044598 4215059112 0249441341
7285314781 0580360337 1077309182 8693147101 7111168391 6581726889 4197587165
8215212822 9518488472 08969

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

1,618033 9887498 9484820 4586834 3656381 1772030 9179805 7628621 3544862 2705260
4628189 0244970 7207204 1893911 3748475 4088075 3868917 5212663 3862223 5369317
9318006 0766726 3544333 8908659 5939582 9056383 2266131 9928290 2678806 7520876
6892501 7116962 0703222 1043216 2695486 2629631 3614438 1497587 0122034 0805887
9544547 4924618 5695364 8644492 4104432 0771344 9470495 6584678 8509874 3394422
1254487 7066478 0915884 6074998 8712400 7652170 5751797 8834166 2562494 0758906
9704000 2812104 2762177 1117778 0531531 7141011 7046665 9914669 7987317 6135600
6708748 0710131 7952368 9427521 9484353 0567830 0228785 6997829 7783478 4587822
8911097 6250030 2696156 1700250 4643382 4377648 6102838 3126833 0372429 2675263
1165339 2473167 1112115 8818638 5133162 0384005 2221657 9128667 5294654 9068113
1715993 4323597 3494985 0904094 7621322 2981017 2610705 9611645 6299098 1629055
5208524 7903524 0602017 2799747 1753427 7759277 8625619 4320827 5051312 1815628
5512224 8093947 1234145 1702237 3580577 2786160 0868838 2952304 5926478 7801788
9921990 2707769 0389532 1968198 6151437 8031499 7411069 2608867 4296226 7575605
2317277 7520353 6139362

irrazionali

e

2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759
45713821785251664274274663919320030599218174135966290435729003342952605956307381
32328627943490763233829880753195251019011573834187930702154089149934884167509244
76146066808226480016847741185374234544243710753907774499206955170276183860626133
13845830007520449338265602976067371132007093287091274437470472306969772093101416
92836819025515108657463772111252389784425056953696770785449969967946864454905987
93163688923609879312773617821542499922957635148220826989519366803318252886939849
64651058209392398294887933203625094431173012381970684161403970198376793206832823
76464804295311802328782509819455815301756717361332069811250996181881593041690351
59888851934580727386673858942287922849989208680582574927961048419844436346324496
84875602336248270419786232090021609902353043699418491463140934317381436405462531
52096183690888707016768396424378140592714563549061303107208510383750510115747704
1718986106873969655212671546889570350354.

π

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899
86280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502
84102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165
27120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817
48815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094
33057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724
89122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094370277
05392171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091
73637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960
86403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859
50244594553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083
81420617177669147303598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532
1712268066130019278766111959092164201989...

Algebrici e Trascendenti

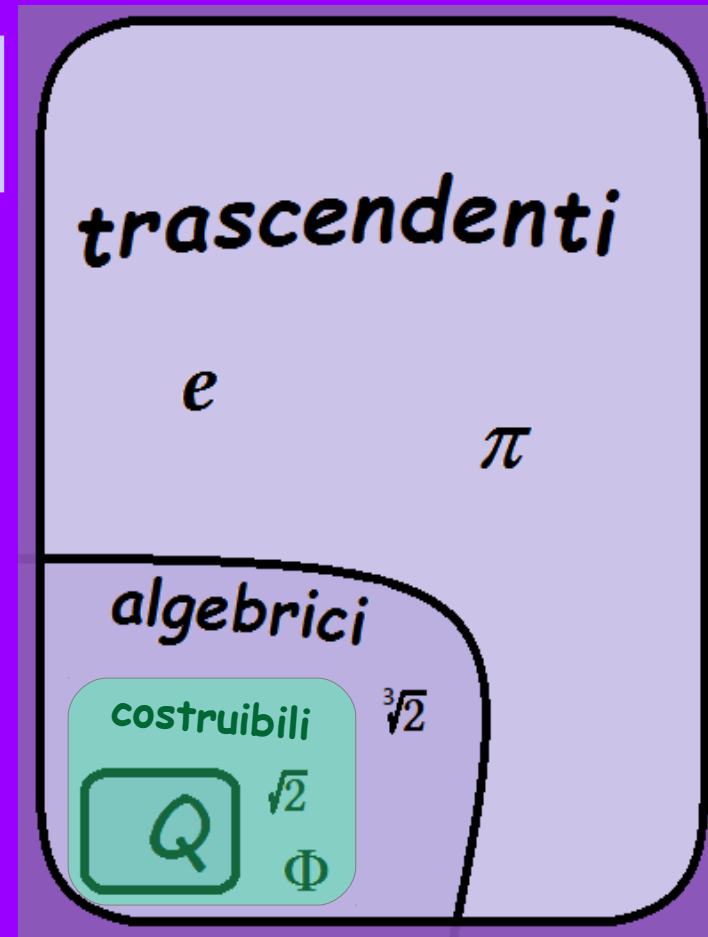
I numeri $\sqrt{2}$, ϕ , e , π sono tutti irrazionali, cioè non possono essere espressi come rapporti fra interi.

Tuttavia i primi due sono radici di qualche polinomio a coefficienti interi:

$\sqrt{2}$ è radice di x^2-2 ϕ è radice di x^2-x-1

Pertanto i numeri $\sqrt{2}$ e ϕ sono **algebrici**

Invece i numeri e e π sono **trascendenti**



Con la scoperta della trascendenza di π (1882) viene risolto, indirettamente, il **problema della quadratura del cerchio**, risalente al V secolo a.C. (*stabilire se, dato un cerchio, sia possibile costruire con riga e compasso un quadrato equivalente*):
se π non è algebrico, allora non è neanche costruibile

Problema assegnato all'Esame di Maturità Scientifica

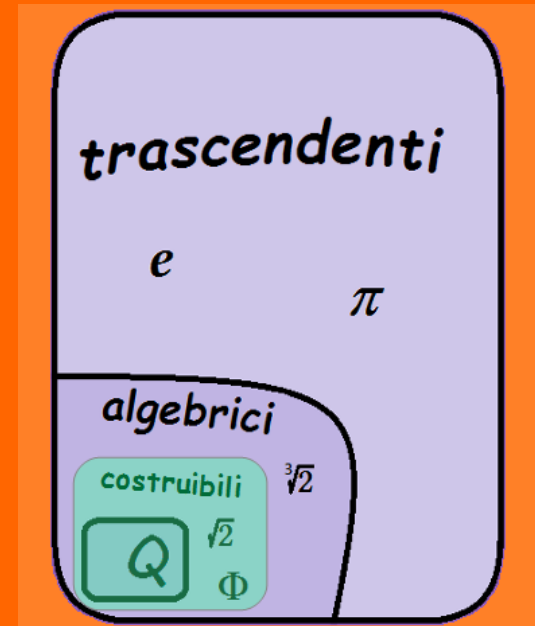


“In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è così spesso citato?”

[Quesito 8 – Anno 2011]

“Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.”

[Problema 2 (punto 4) – Anno 2007]



Altri due problemi classici, nell'ambito delle costruzioni con riga e compasso, sono: il problema della *duplicazione del cubo* e il problema della *trisezione dell'angolo*.

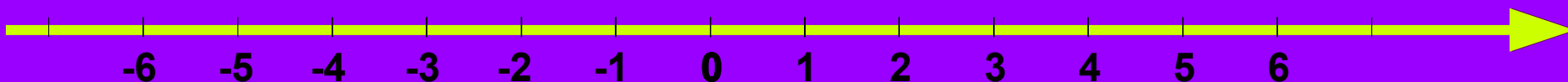
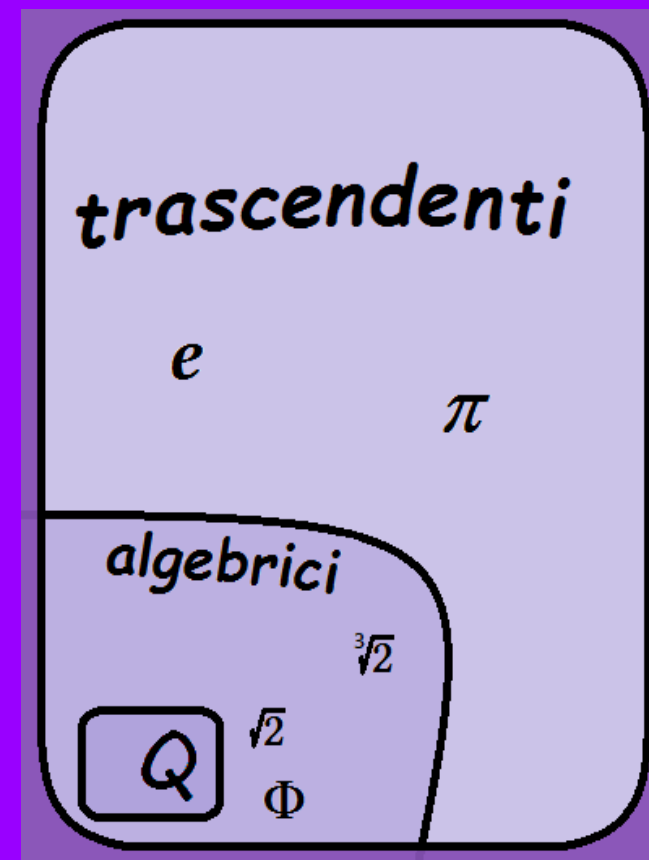
L'oracolo di Delo, interpellato dagli ateniesi per la sciagura della peste, aveva consigliato di raddoppiare il volume dell'altare di forma cubica dedicato al dio Apollo, adirato per le dimensioni troppo ridotte. Così gli spigoli del cubo vennero raddoppiati. E la peste non cessò!

In seguito gli ateniesi dovettero rivolgersi a Platone per risolvere correttamente il problema.

Algebrici e Trascendenti

I numeri trascendenti sono più numerosi dei numeri algebrici

Sparando a caso sull'asse reale, la probabilità di colpire un numero algebrico è praticamente nulla



Il primo a capire che gli insiemi infiniti possono avere diverse cardinalità fu il matematico tedesco Georg Cantor (1845-1918), considerato il padre dell'insiemistica.

Il paradiso di Cantor

$\aleph_3$

$P(P(R))$

insieme dei sottoinsiemi dell'insieme dei sottoinsiemi di R

$\aleph_2$

$P(R)$

insieme dei sottoinsiemi di R

$\aleph_1$

J

insieme dei numeri irrazionali

R

*insieme dei numeri reali
insieme dei punti della retta*

R^2

*insieme delle coppie di numeri reali
insieme dei punti del piano*

$\aleph_0$

Q_P

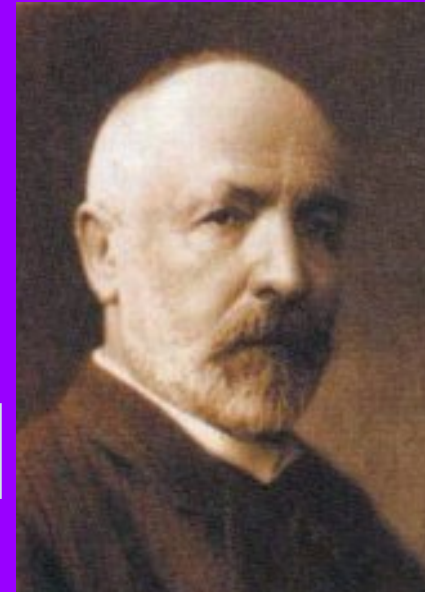
insieme dei numeri quadrati

N

insieme dei numeri naturali

Q

insieme dei numeri razionali



Georg Cantor 1845-1918

L'insieme N è infinito, e non esistono insiemi infiniti di cardinalità minore.
Su ogni nuvoletta compaiono insiemi fra loro equipotenti (stessa cardinalità).
Aleph-0 è il primo dei numeri *cardinali transfiniti*, che sono infiniti.

"La soluzione delle difficoltà che in passato circondavano l'infinito matematico è probabilmente la massima conquista che la nostra epoca ha da vantare" (Bertrand Russel - 1910)

"Nessuno riuscirà mai a cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi" (David Hilbert - 1926)

Problema assegnato all'Esame di Maturità Scientifica

“Tre amici discutono animatamente di numeri reali.

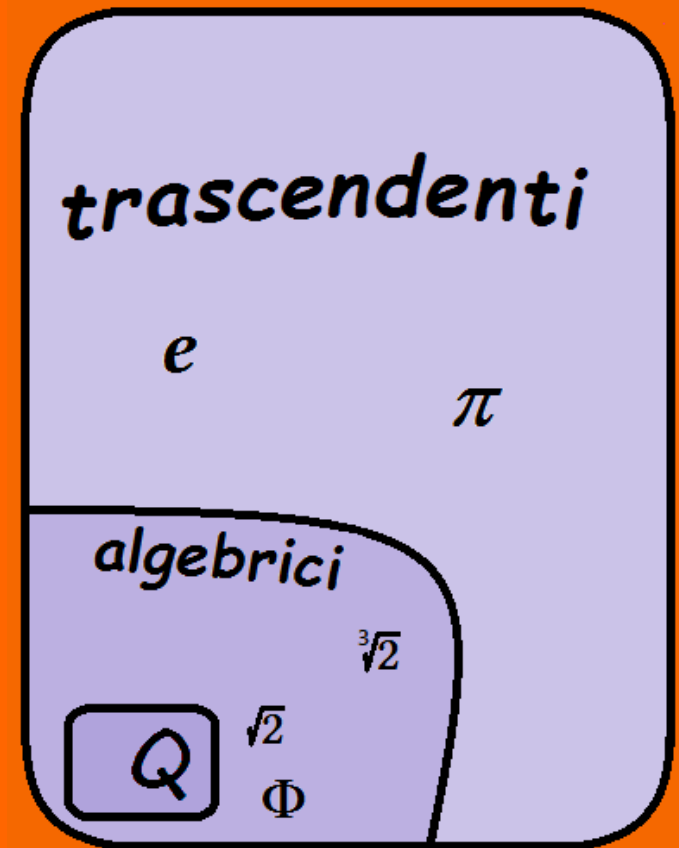
Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali.

Paolo sostiene che [...] la maggior parte dei numeri reali sono razionali.

Luisa afferma il contrario: [...] esistono più numeri irrazionali che razionali.

Chi ha ragione?”

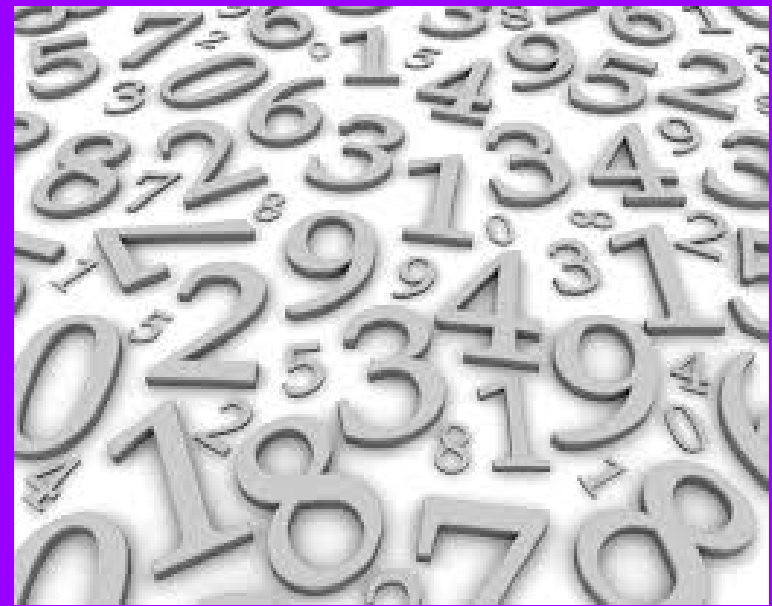
[Quesito 9 - Anno 2013 PNI]



*sparando a caso sull'asse reale,
la probabilità di colpire un numero
razionale è praticamente nulla*

LA SCRITTURA DEI NUMERI

L'attuale sistema di numerazione posizionale a base dieci fu introdotto in Europa agli inizi del XIII secolo da Leonardo Pisano, nel suo libro intitolato "Liber abaci".



Cifre indo-arabe



La numerazione romana

NUMERI ROMANI

1	I
2	II
3	III
4	IV
5	V
6	VI
7	VII
8	VIII
9	IX
10	X



...e ora moltiplica
questo numero
per se stesso.

1	5	10	50	100	500	1.000	10.000	100.000
I	V	X	L	C	D	M	$\overline{X}$	$\overline{C}$

Prima di allora si adottava la numerazione romana.

La numerazione romana è una numerazione additiva: il valore del numero si ottiene sommando il valore dei simboli di cui il numero è composto. In qualche caso si ricorre alla sottrazione.

$$500+100+100+100+10+10+10+(10-1)=839$$

LA NUMERAZIONE DECIMALE

Nella numerazione decimale il valore di ogni cifra dipende anche dalla posizione che la cifra occupa nel numero.

Lo zero diventa indispensabile.

42.406

- $6 \times 10^0 = 6$
- $0 \times 10^1 = 00$
- $4 \times 10^2 = 400$
- $2 \times 10^3 = 2.000$
- $4 \times 10^4 = 40.000$



La numerazione binaria

Il sistema numerico binario è un sistema numerico posizionale in base 2.

Esso utilizza solo due simboli, di solito indicati con 0 e 1.



La numerazione binaria ha consentito lo sviluppo dell'informatica.

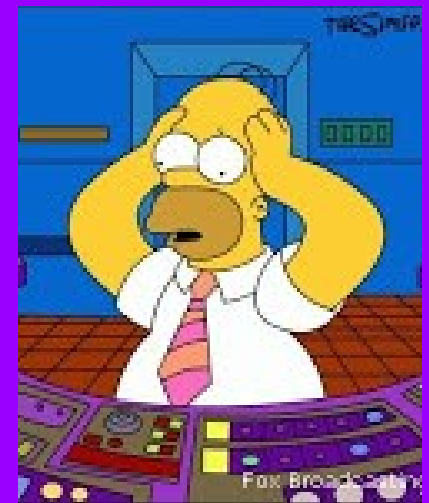
Negli elaboratori elettronici un condensatore può essere carico oppure scarico, un circuito elettrico può essere percorso o non percorso da corrente, un cella di un disco può essere magnetizzata oppure smagnetizzata, e così via.

In tutti i casi, questi supporti dispongono di due stati fisici, ai quali vengono attribuiti convenzionalmente i valori di 0 e di 1.

1	1	1	0	1	→	$1 \times 2^0 = 1$
					→	$0 \times 2^1 = 0$
					→	$1 \times 2^2 = 4$
					→	$1 \times 2^3 = 8$
					→	$1 \times 2^4 = 16$
						29

Un risultato stano!

$$\begin{array}{r} 1+ \\ 1= \\ \hline 10 \end{array}$$



LA NUMERAZIONE DECIMALE

L'introduzione del sistema numerico decimale incontrò numerosi resistenze, perché era assai difficile da comprendere e generava molta confusione. La città di Firenze ne dovette vietare l'uso da parte delle banche, perché i clienti avevano il sospetto di essere ingannati.



I termini *cifra* e *zero* derivano entrambi dall'arabo *sifr* (vuoto)



Il termine latino *zephirum* proviene da *sifr* per assonanza

Lo zero creava confusione, e si sospettava che venisse usato per messaggi segreti; da qui deriva l'espressione “messaggi cifrati”.



Il sistema metrico decimale

Sulla numerazione in base 10 è fondato anche il *Sistema Metrico Decimale*.

La misura delle lunghezze

<i>sottomultipli</i>			<i>unità</i>	<i>multipli</i>		
<i>mm</i> <i>0,001 m</i>	<i>cm</i> <i>0,01 m</i>	<i>dm</i> <i>0,1 m</i>	<i>metro</i>	<i>dam</i> <i>10 m</i>	<i>hm</i> <i>100 m</i>	<i>km</i> <i>1000 m</i>

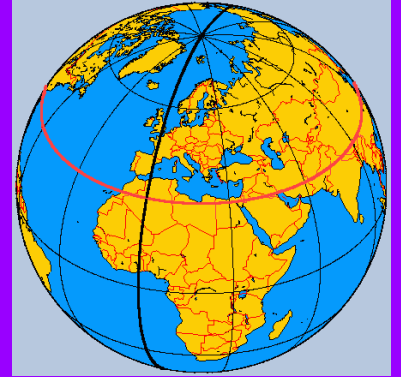
La misura dei pesi

<i>sottomultipli</i>			<i>unità</i>	<i>multipli</i>		
<i>mg</i> <i>0,001 g</i>	<i>cg</i> <i>0,01 g</i>	<i>dg</i> <i>0,1 g</i>	<i>grammo</i>	<i>dag</i> <i>10 g</i>	<i>hg</i> <i>100 g</i>	<i>kg</i> <i>1000 g</i>

Il metro

L'adozione del metro fu stabilita in Francia nel 1791 dall'Accademia Nazionale delle Scienze.

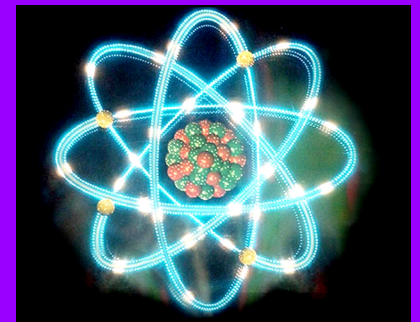
Il metro era definito come *la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre*.



L'incertezza nella misurazione del meridiano portò il Bureau International des Poids et des Mesures a ridefinire nel 1889 il metro come *la distanza tra due linee incise su una barra campione di platino-iridio conservata a Sèvres*.



Nel 1960, con la disponibilità dei laser, il metro fu ribattezzato come *la lunghezza pari a 1.650.763,73 lunghezze d'onda nel vuoto della radiazione corrispondente alla transizione fra i livelli $2p^{10}$ e $5d^5$ dell'atomo di kripton-86*.



Nel 1983 la XVII Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure definì il metro come *la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in $1/299.792.458$ di secondo*.



Il chilogrammo

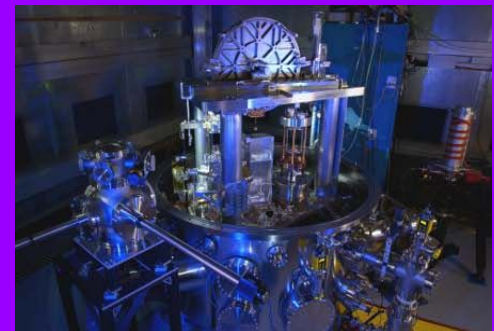
Il chilogrammo è nato come la massa di un decimetro cubo di acqua distillata alla temperatura di 4 °C.



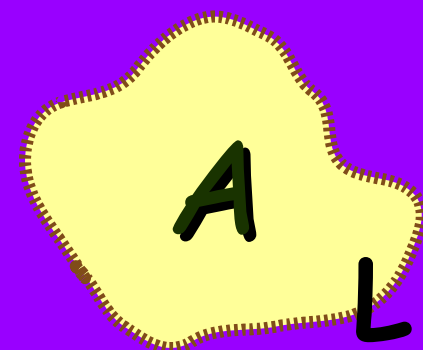
In seguito il chilogrammo è stato definito come la massa di un particolare cilindro equilatero, costituito da una lega di platino-iridio depositato presso l'Ufficio Internazionale dei Pesi e delle Misure a Sèvres. Il prototipo è custodito sotto tre campane di vetro. Per accedere al sotterraneo blindato occorre l'uso contemporaneo di tre diverse chiavi, custodite da tre personalità dell'Ufficio Internazionale dei Pesi e delle Misure.



In un futuro molto prossimo la definizione di chilogrammo è destinata a cambiare: il prototipo custodito a Sèvres sarà probabilmente sostituito dalla costante di Planck, che associa la frequenza di una particella quantistica alla sua energia.



Il problema isoperimetrico



Eravamo rimasti a:

*disuguaglianza
isoperimetrica*



$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

*deficit
isoperimetrico*



$$\delta = \frac{L^2}{4\pi} - A$$

Il problema isoperimetrico

Ad esempio, con una **corda lunga 1 metro** non è possibile contenere un'area maggiore di **796 cm²**.

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

$$\delta = \frac{L^2}{4\pi} - A$$

Esempi con figure rettangolari

$$\begin{array}{l} A \approx 400 \\ \delta \approx 396 \end{array}$$

40 10

$$\begin{array}{l} A \approx 600 \\ \delta \approx 196 \end{array}$$

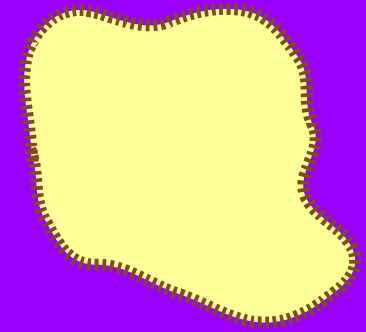
30 20

$$\begin{array}{l} A \approx 625 \\ \delta \approx 171 \end{array}$$

25 25

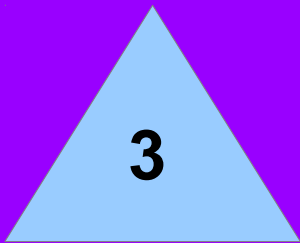
vanno meglio i poligoni regolari !

Il problema isoperimetrico

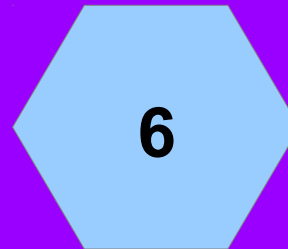


Deficit isoperimetrico di alcuni poligoni regolari
con perimetro di 100 cm

Valore invalicabile dell'area racchiusa: 795,77 cm²



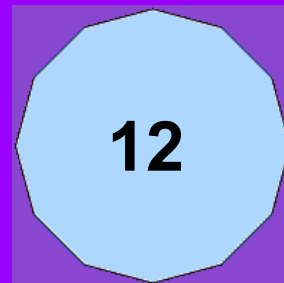
$A \approx 481$
 $\delta \approx 315$



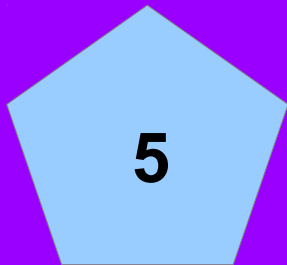
$A \approx 722$
 $\delta \approx 74$



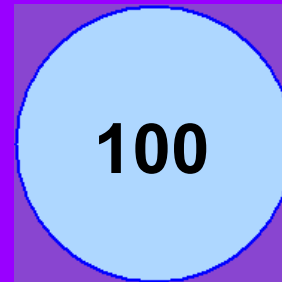
$A \approx 625$
 $\delta \approx 171$



$A \approx 776$
 $\delta \approx 20$



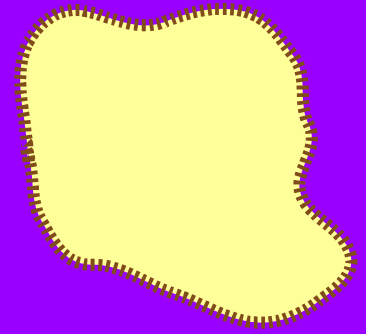
$A \approx 688$
 $\delta \approx 108$



$A \approx 795,51$
 $\delta \approx 0,26$

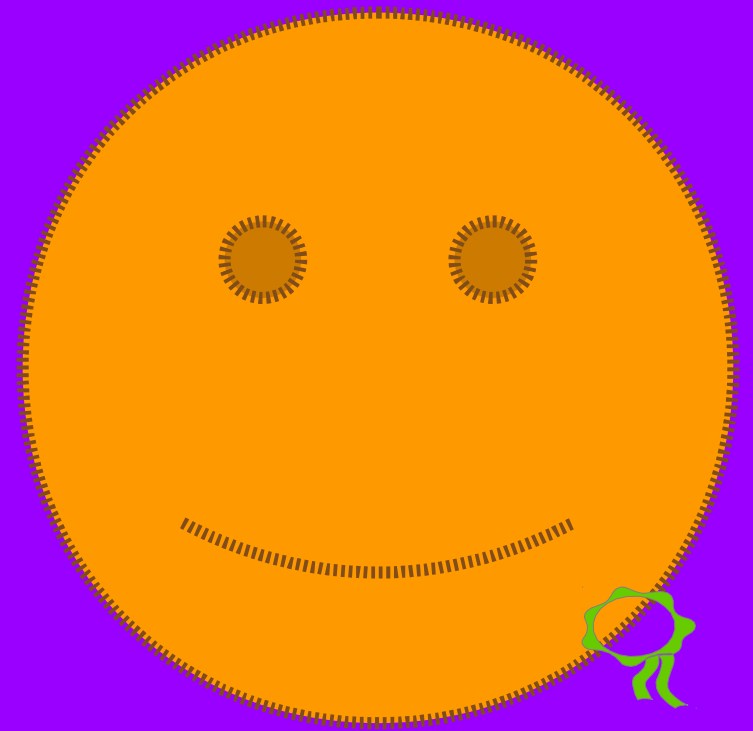
molti lati è meglio !

Il problema isoperimetrico



**Il cerchio è l'unica
figura piana avente
deficit isoperimetrico
uguale a zero**

$$\delta = 0$$



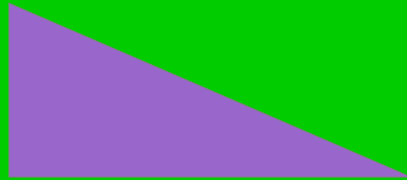
AREA DI FIGURE ISOPERIMETRICHE

completare

Calcola l'area delle seguenti figure, accomunate dal fatto di avere tutte il perimetro lungo 60 cm

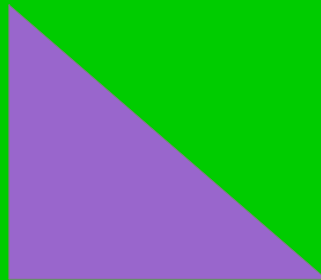
triangolo rettangolo con un cateto metà dell'ipotenusa

Area =



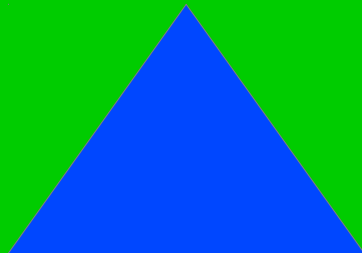
triangolo rettangolo isoscele

Area =



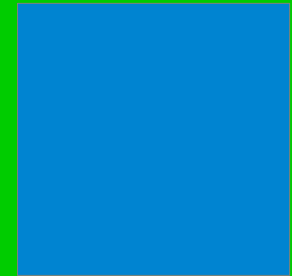
triangolo equilatero

Area =



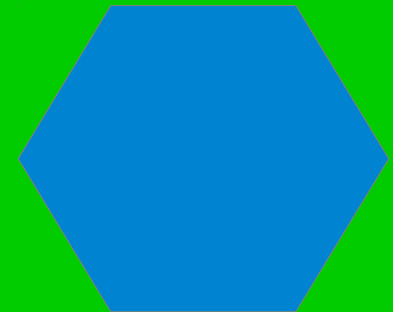
quadrato

Area =



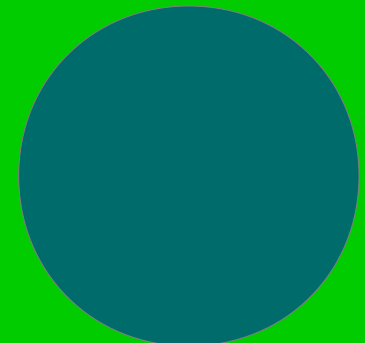
esagono regolare

Area =



cerchio

Area =



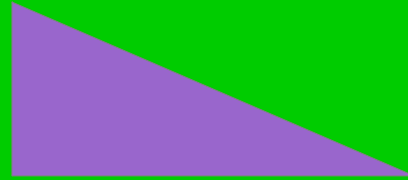
AREA DI FIGURE ISOPERIMETRICHE

risultati

Calcola l'area delle seguenti figure, accomunate dal fatto di avere tutte il perimetro lungo 60 cm

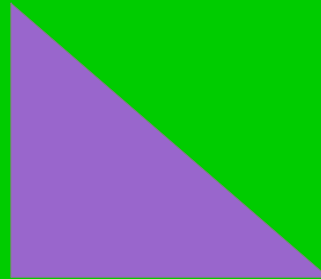
triangolo rettangolo con un cateto metà dell'ipotenusa

$$\text{Area} = 139,2 \text{ cm}^2$$



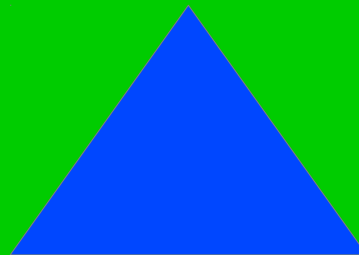
triangolo rettangolo isoscele

$$\text{Area} = 154,4 \text{ cm}^2$$



triangolo equilatero

$$\text{Area} = 173,2 \text{ cm}^2$$



regolare è meglio!

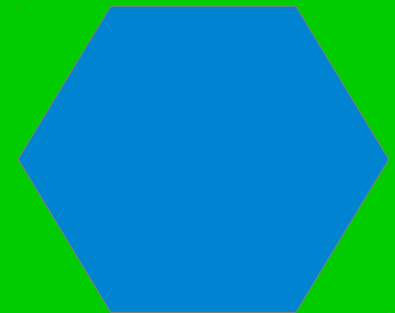
quadrato

$$\text{Area} = 225,0 \text{ cm}^2$$



esagono regolare

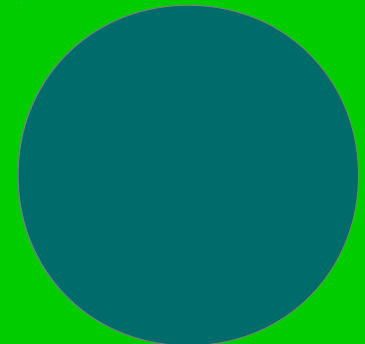
$$\text{Area} = 259,8 \text{ cm}^2$$



molti lati è meglio!

cerchio

$$\text{Area} = 286,5 \text{ cm}^2$$



IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO IN TRE DIMENSIONI

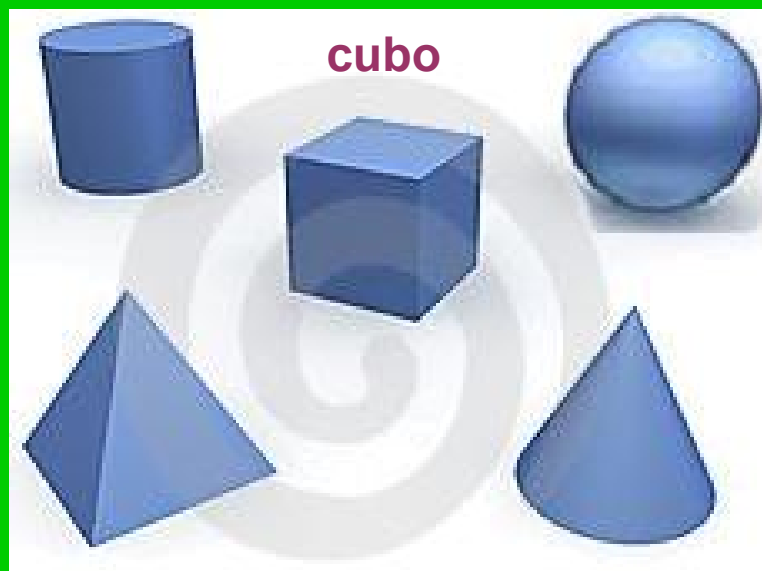
completare

Fra tutte le superfici chiuse aventi una data area, qual è quella che racchiude il massimo volume?

Questi solidi sono accomunati dal fatto che ciascuno di essi è delimitato da una superficie di 120 cm^2 .

Calcola il volume di ogni solido

cilindro avente
per sezione
un quadrato



cubo

sfera

tetraedro
regolare

cono avente
per sezione un
triangolo equilatero

Volume del tetraedro =

Volume del cono =

Volume del cubo =

Volume del cilindro =

Volume della sfera =

risultati

IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO IN TRE DIMENSIONI

Questi solidi sono accomunati dal fatto che ciascuno di essi è delimitato da una superficie di 120 cm^2 .

Calcola il volume di ogni solido

cilindro avente
per sezione
un quadrato



cubo

sfera

tetraedro
regolare

cono avente
per sezione un
triangolo equilatero

Volume del tetraedro = $67,96 \text{ cm}^3$

Volume del cono = $82,41 \text{ cm}^3$

Volume del cubo = $89,44 \text{ cm}^3$

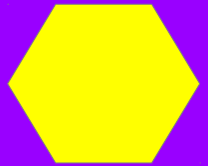
Volume del cilindro = $100,93 \text{ cm}^3$

Volume della sfera = $123,61 \text{ cm}^3$

IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO IN TRE DIMENSIONI

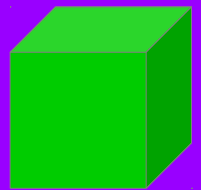
Dalle figure piane alle figure solide

Si è visto, nel caso dei poligoni regolari, che, a parità di perimetro, l'area aumenta con l'aumentare del numero dei lati.

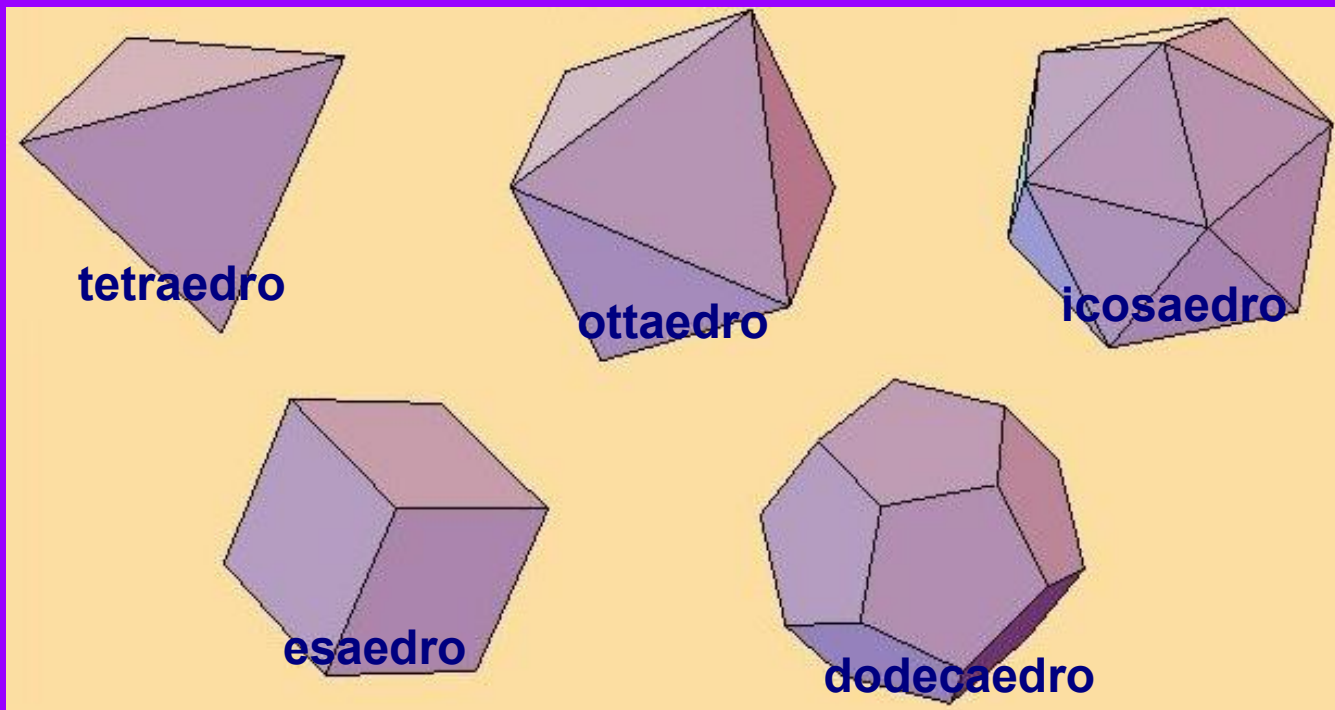


Analogamente, passando allo spazio tridimensionale:

Nel caso dei *poliedri regolari*, a parità di superficie, il volume aumenta con l'aumentare del numero delle facce.



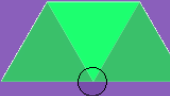
Ma quanti sono i poliedri regolari?

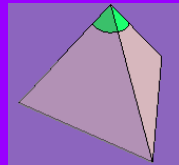


I poliedri regolari

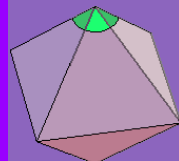
**Non si possono
avere più di 5
poliedri regolari**

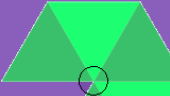
**Solo tre poliedri
regolari con
facce triangolari**

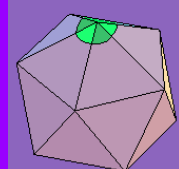

$$60^\circ \times 3 = 180^\circ$$

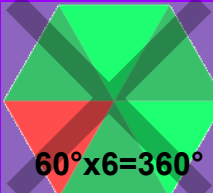



$$60^\circ \times 4 = 240^\circ$$



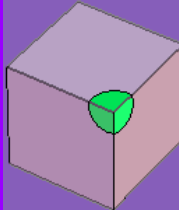

$$60^\circ \times 5 = 300^\circ$$

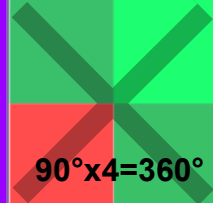



$$60^\circ \times 6 = 360^\circ$$

**Solo un poliedro
regolare con
facce quadrate**

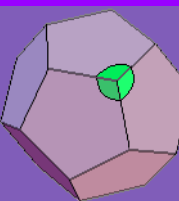

$$90^\circ \times 3 = 270^\circ$$




$$90^\circ \times 4 = 360^\circ$$

**Solo un poliedro
regolare con
facce pentagonali**

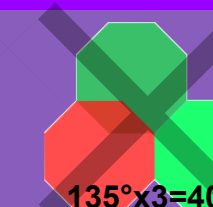

$$108^\circ \times 3 = 324^\circ$$



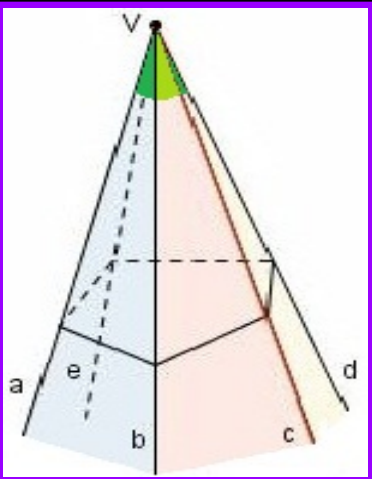

$$108^\circ \times 4 = 432^\circ$$

**Nessun poliedro regolare con facce
esagonali, ettagonali, ottagonali,**


$$120^\circ \times 3 = 360^\circ$$

$$128,6^\circ \times 3 = 385,7^\circ$$

$$135^\circ \times 3 = 405^\circ$$

Ricordiamo che
la somma degli
angoli che
compongono
un angoloide
è sempre
minore di un
angolo giro

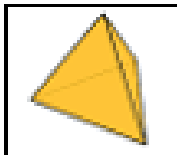
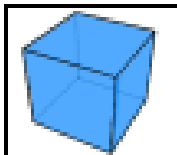
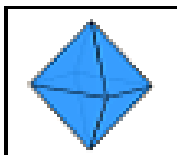
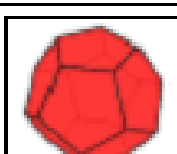
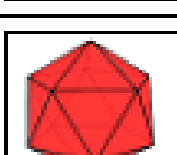


I poliedri regolari

Alla stessa conclusione (“non più di 5 poliedri regolari”) si può arrivare con un ragionamento che utilizza la **formula di Eulero per i poliedri**:

$$F + V = S + 2$$

Fatti **V**edere **S**abato alle **2**

	FACCE	VERTICI	SPIGOLI
	4	4	6
	6	8	12
	8	6	12
	12	20	30
	20	12	30

La formula vale
per tutti i poliedri,
non solo per
quelli regolari

icosaedro
troncato

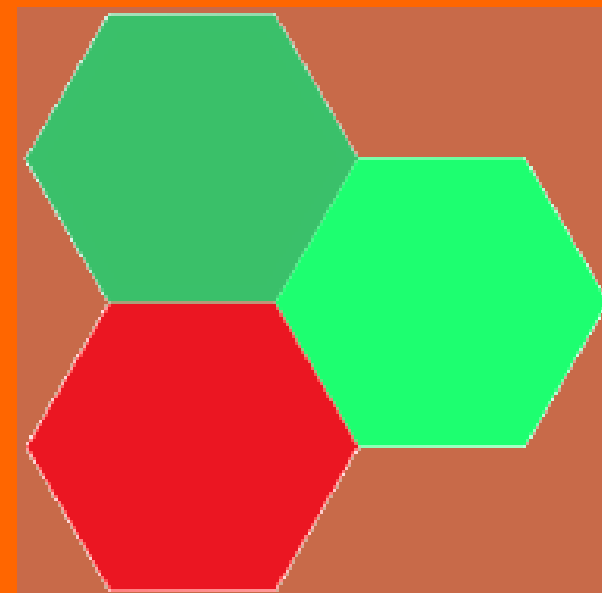


F	V	S
32	60	90

Problema assegnato all'Esame di Maturità Scientifica

“Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.”

[Quesito 2 – Anno 2014]



“I poliedri regolari – noti anche come solidi platonici – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?”

[Quesito 2 – Anno 2006]

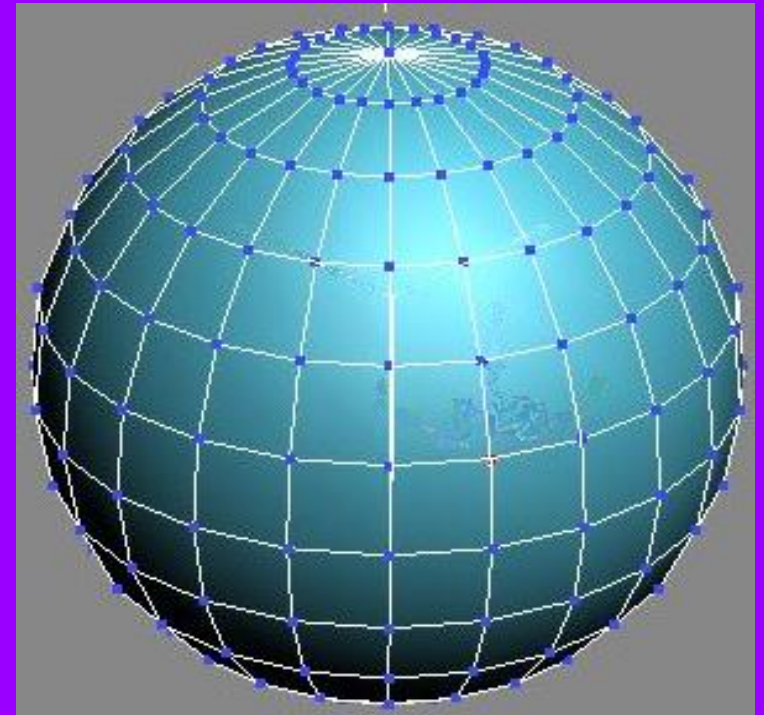


L'ottimizzazione nella storia

Il problema isoperimetrico in tre dimensioni

La conclusione per il problema isoperimetrico in tre dimensioni è la seguente:

Fra tutte le superfici dello spazio, anche non poliedriche, aventi la stessa area, la superficie sferica è quella che racchiude il massimo volume.



Una dimostrazione rigorosa venne data da Hermann Schwarz nel 1884

Tuttavia, dopo le novità introdotte da Lebesgue nel campo della teoria della misura, anche questo risultato aveva bisogno di opportuni aggiornamenti.

L'ottimizzazione nella storia

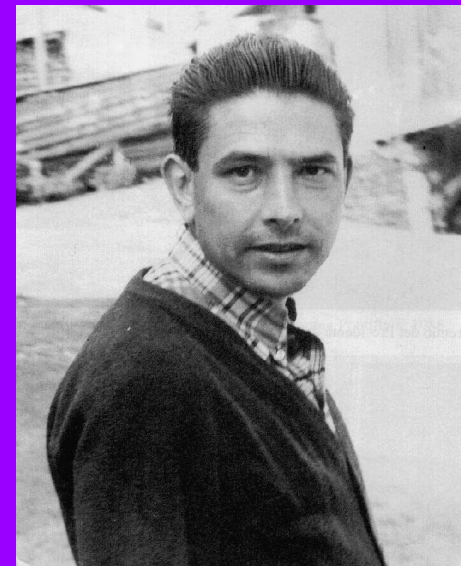
Il problema isoperimetrico - Epilogo

La parola fine fu scritta dal matematico leccese **Ennio De Giorgi**, che nel 1953 arrivò ad enunciare una **definizione molto generale di perimetro**, e con questa poté riformulare il problema piano dandogli la seguente forma:

Tra tutte le figure piane aventi “perimetro di De Giorgi” assegnato, determinare quella avente “misura di Lebesgue” massima.

Fu poi egli stesso nel 1958 a dimostrare che il problema isoperimetrico generale ha ancora una volta un'unica soluzione, che è rappresentata dalla circonferenza.

Anzi, a dirla tutta, egli diede una dimostrazione che era valida anche nel caso n -dimensionale (n qualsiasi), riferita cioè agli ipersolidi delimitati da ipersuperfici di area assegnata.



Ennio De Giorgi

Ennio De Giorgi è nato a Lecce nel 1928.

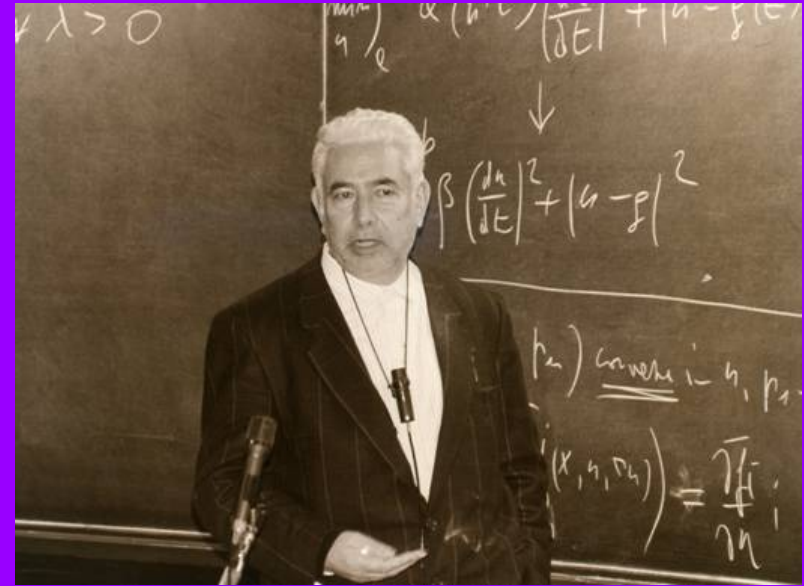
Dal 1959 ha ricoperto la cattedra di Analisi Matematica Algebrica ed Infinitesimale presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.

Nel 1957 trovò la soluzione del XIX problema di Hilbert.

Nel 1990 gli venne assegnato il premio Wolf.

Dopo la sua morte, avvenuta nel 1996, gli è stato intitolato il Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce.

« La matematica è forse l'unica fra tutte le scienze ad avere la capacità di passare dall'osservazione delle cose visibili all'immaginazione delle cose invisibili. Questo forse è il segreto della forza della matematica. »



Progetto Lauree Scientifiche

Maglie, 18 gennaio 2017

OTTIMIZZAZIONE E DINTORNI

Cosimo De Mitri

- FINE SECONDA PARTE -



Progetto Lauree Scientifiche

Liceo Scientifico “Leonardo da Vinci”

Maglie, 25 gennaio 2017

OTTIMIZZAZIONE E DINTORNI

Cosimo De Mitri

- TERZA PARTE -



UNIVERSITA' DEL SALENTO

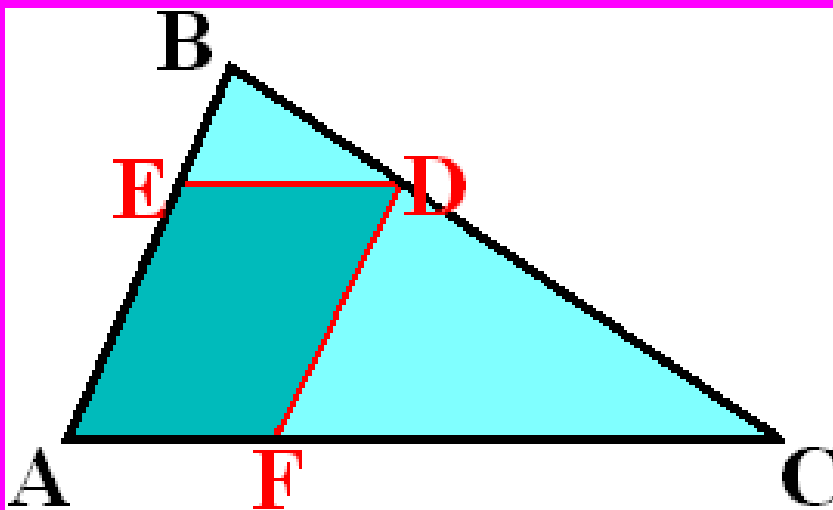


L'ottimizzazione nella storia

Il primo problema di massimo formulato esplicitamente compare nel V Libro degli *Elementi* di Euclide

Proposizione 27. *Di tutti i parallelogrammi applicati alla stessa retta e deficienti di figure parallelogrammatiche simili e similmente situate rispetto al parallelogramma descritto sulla metà della retta, ha area maggiore quel parallelogramma che è applicato a metà della retta e che è simile al difetto.*

In altri termini: dato un triangolo ABC , se da un punto D del lato BC si tracciano i segmenti DE e DF paralleli agli altri due lati, l'area del parallelogramma $AEDF$ è massima quando D è il punto medio di BC .

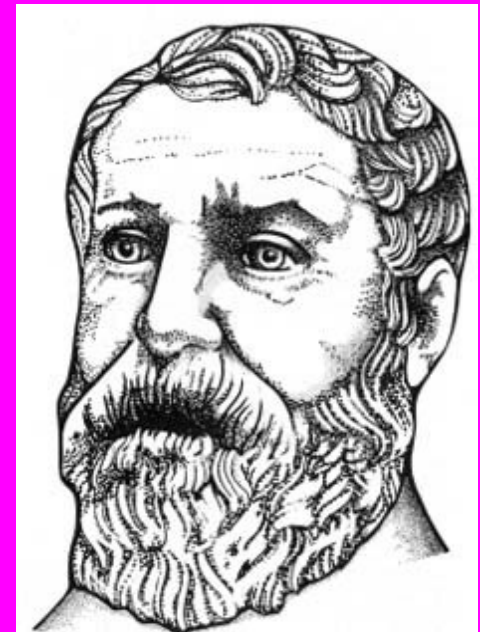


Euclide di Alessandria (IV-III a.C.)

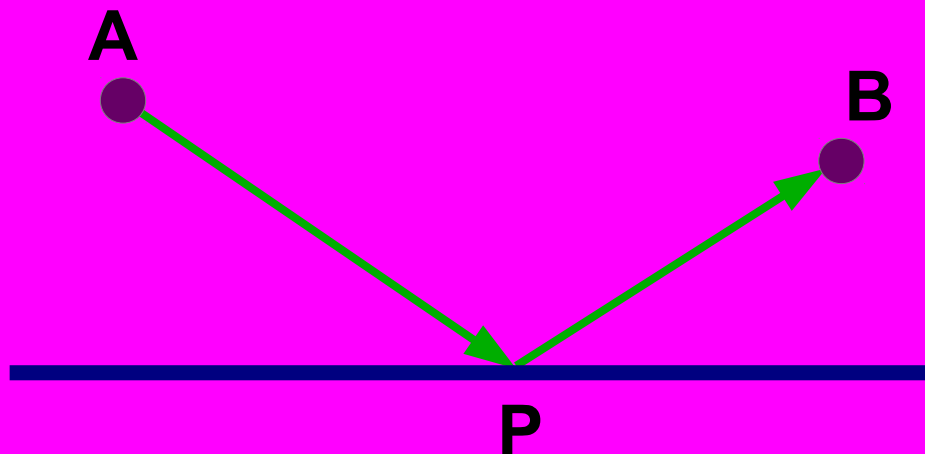
L'ottimizzazione nella storia

Nel primo secolo d.C. Erone di Alessandria stabilisce il seguente teorema

Teorema di Erone. *Data una retta r e due punti esterni A e B , il punto P della retta R che minimizza la somma $AP+PB$ è quel punto tale che i segmenti AP e PB formano angoli uguali con la retta r .*

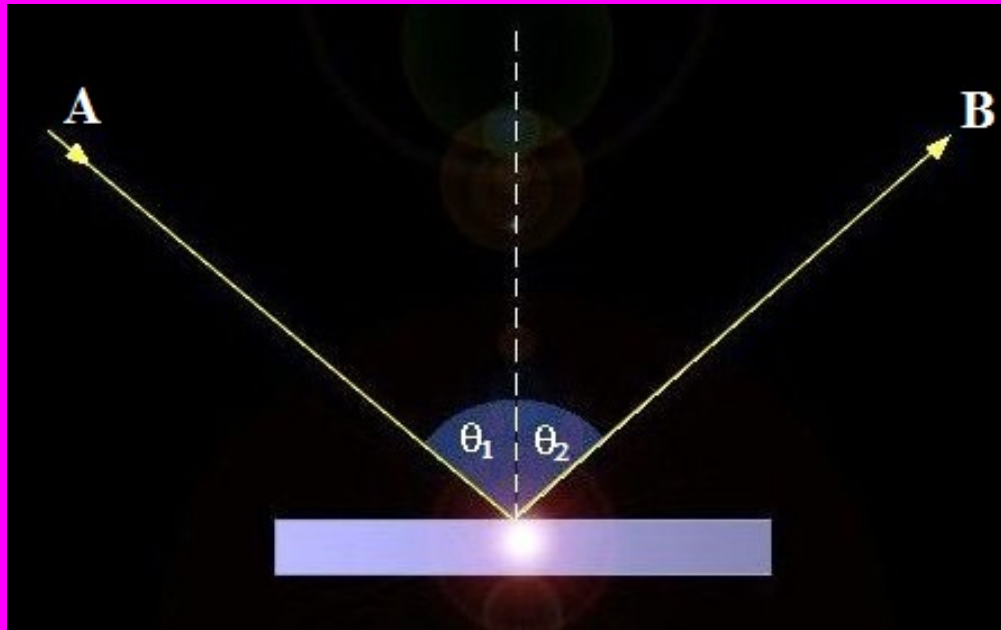
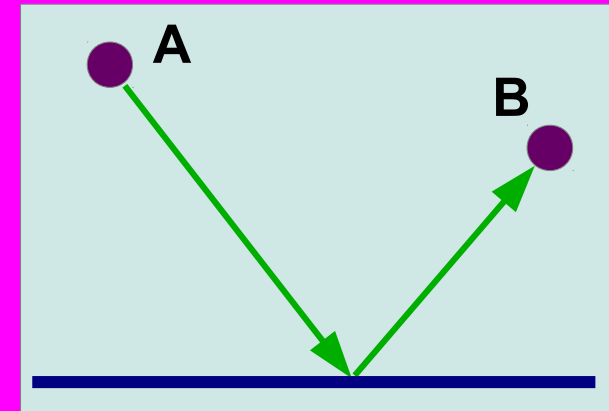


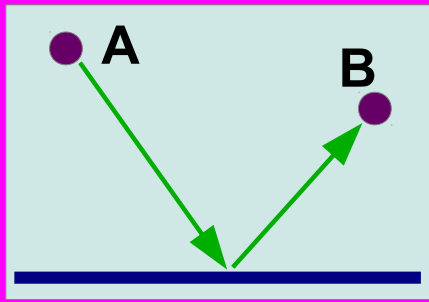
Erone di Alessandria (I d.C.)



La Natura è la più brava risolutrice dei problemi di massimo e minimo

La via più breve per passare da un punto *A* ad un punto *B* dopo un rimbalzo su una superficie che fa da sponda è esattamente quella che sceglie il raggio luminoso nel fenomeno della riflessione





Il cowboy a cavallo

Il cowboy è interessato alla risoluzione del problema.



Egli, prima di rientrare alla fattoria, vuole raggiungere il fiume per fare abbeverare il cavallo.



giallo, verde, rosso, blu
qual è il percorso più corto?



Il cowboy a cavallo



angolo di
incidenza

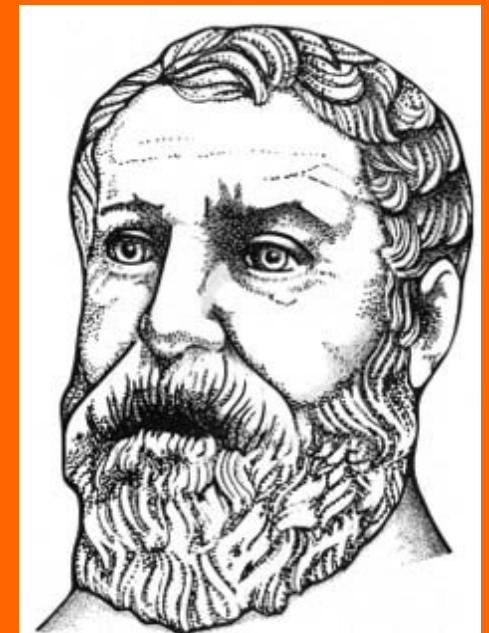
angolo di
riflessione

Il percorso più corto
è quello di colore **verde**

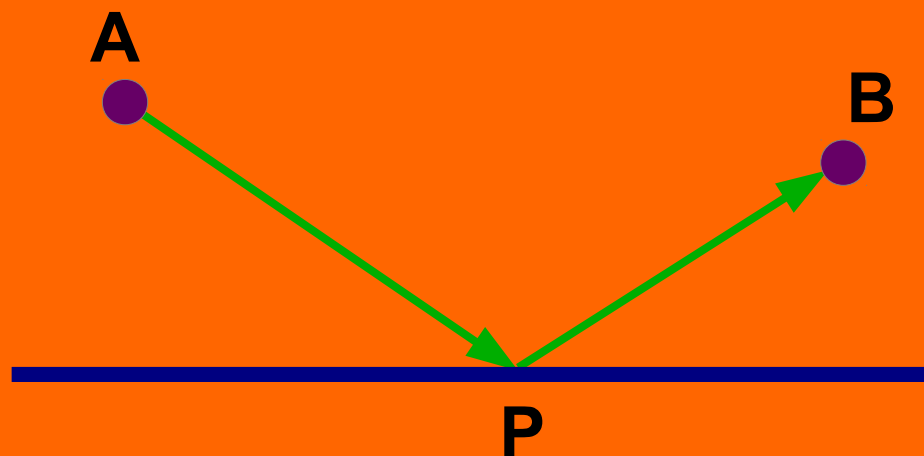
Problema assegnato all'Esame di Maturità Scientifica

“Il problema di Erone [...] consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r , nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r . Si risolva il problema nel modo che si preferisce.”

[Quesito 9 - Anno 2012]



Erone di Alessandria (I d.C.)



L'ottimizzazione nella storia

Il problema della curva brachistocrona

Dati due punti a diverse altezze in un piano verticale, trovare la forma che deve avere uno scivolo affinché una pallina passi nel più breve tempo possibile dal punto più alto a quello più basso



Johann Bernoulli alla fine del 1600 dimostra che la guida ottimale è un *arco di cicloide*

Se $y=y(x)$ è l'equazione della curva incognita, il tempo di caduta $T(y)$ è espresso da un integrale.

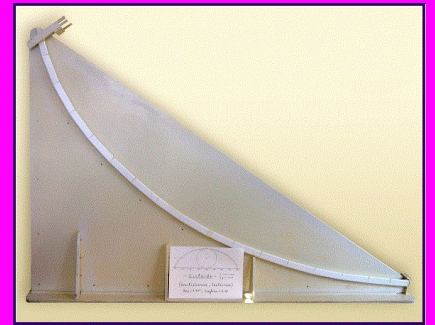
$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{y(x)}} dx$$

Il problema è determinare, fra tutte le curve y che uniscono A con B, quella che rende minimo il funzionale $T(y)$.

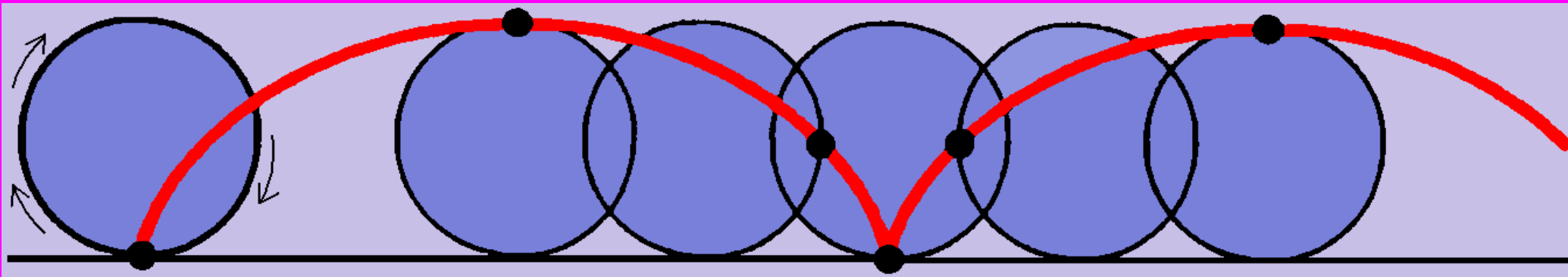




La cicloide



La *cicloide* è la curva descritta da un punto della ruota di una bicicletta che si muove lungo un percorso rettilineo.



$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2r - y}{y}$$

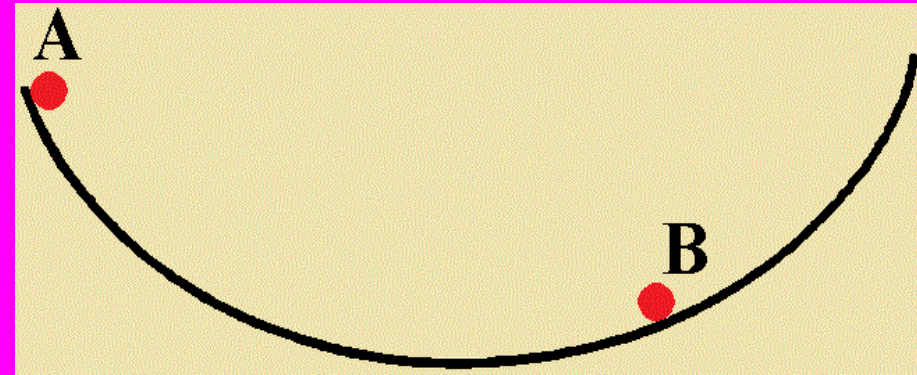
equazione differenziale

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

equazione parametrica

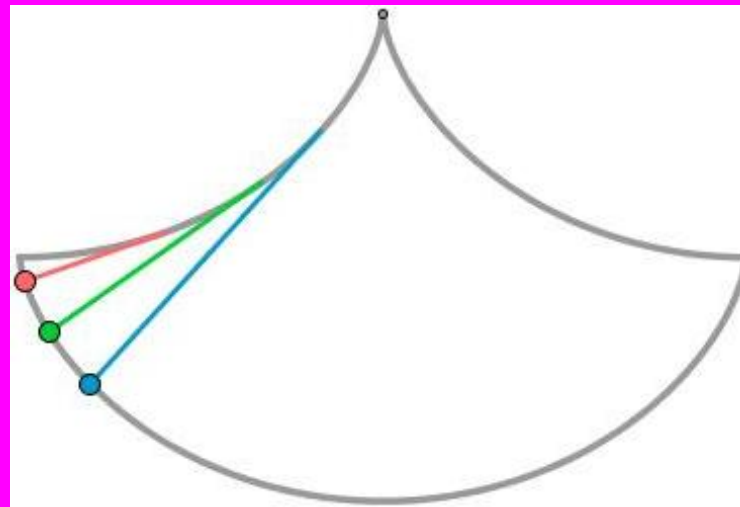
La cicloide

La cicloide, oltre ad essere **brachistocrona**, è anche ***tautocrona***: le due palline poste in A e in B e lasciate cadere contemporaneamente raggiungono il fondo nello stesso istante.



Questa proprietà può essere sfruttata per realizzare un ***pendolo perfettamente isocrono***, nel quale cioè il periodo delle oscillazioni è indipendente dall'ampiezza delle stesse.

L'espedito consiste nel costringere il filo ad oscillare fra due guide cicloidalì: poiché l'**evolvente** di una cicloide è ancora una cicloide, il peso descriverà anch'esso una cicloide



Pendolo di Huygens

L'ottimizzazione nella storia

Il problema della curva brachistocrona

In verità la dimostrazione di Johann Bernoulli era sbagliata!



Johann Bernoulli

Egli stesso si accorse dell'errore quando lesse la dimostrazione del fratello Jakob, che era stato da lui sfidato a risolvere lo stesso problema.

I due fratelli litigarono aspramente quando Johann cercò di spacciare per sua la dimostrazione corretta.



Jakob Bernoulli

La cicloide è stata soprannominata *la bella Elena della geometria*, anche a causa delle numerose dispute di cui è stata oggetto

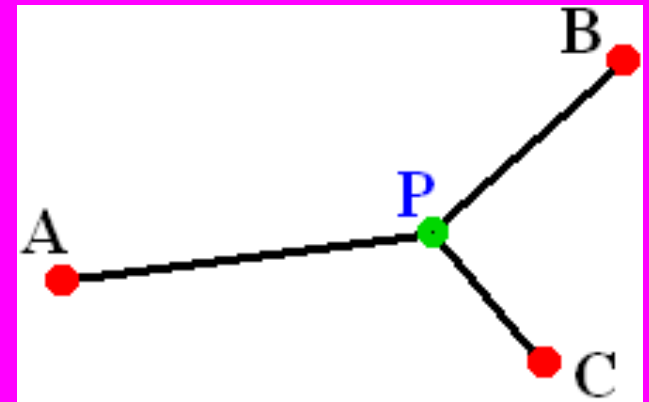
L'ottimizzazione nella storia

Il problema della rete stradale

Sono dati tre villaggi e si vuole determinare la più corta fra tutte le reti stradali che li collegano

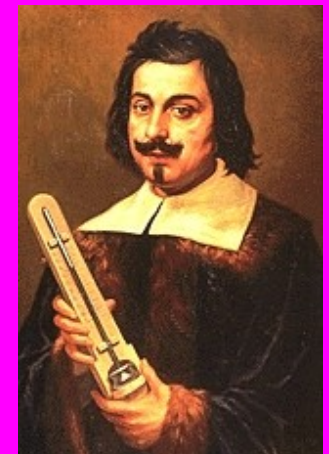
Matematicamente il problema si può formulare così:

Dati tre punti A, B e C, trovare un punto P tale che sia minima la somma delle distanze fra questo punto e quelli assegnati



Fermat

Il problema fu proposto intorno alla metà del XVII secolo da Pierre de Fermat in una lettera inviata ad Evangelista Torricelli, che in breve tempo trovò la soluzione.

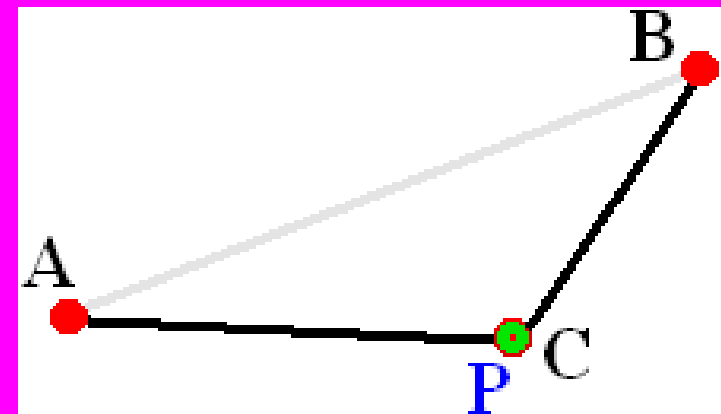
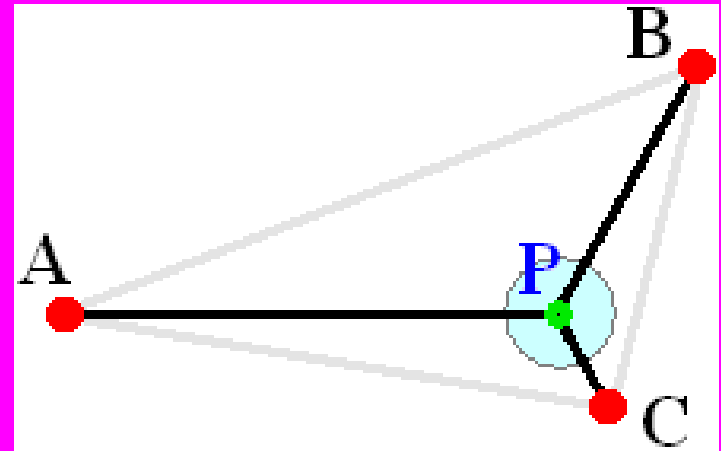


Torricelli

Il problema della rete stradale

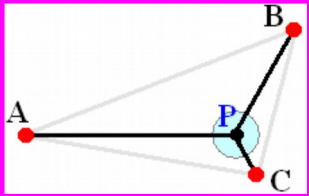
La soluzione è rappresentata dal punto P dal quale i lati del triangolo ABC si vedono sotto angoli uguali tra loro (120° ciascuno).

Se però uno degli angoli del triangolo è uguale o maggiore di 120° , allora il punto P deve coincidere con il vertice di quest'angolo.



Il punto P è chiamato *punto di Torricelli-Fermat*

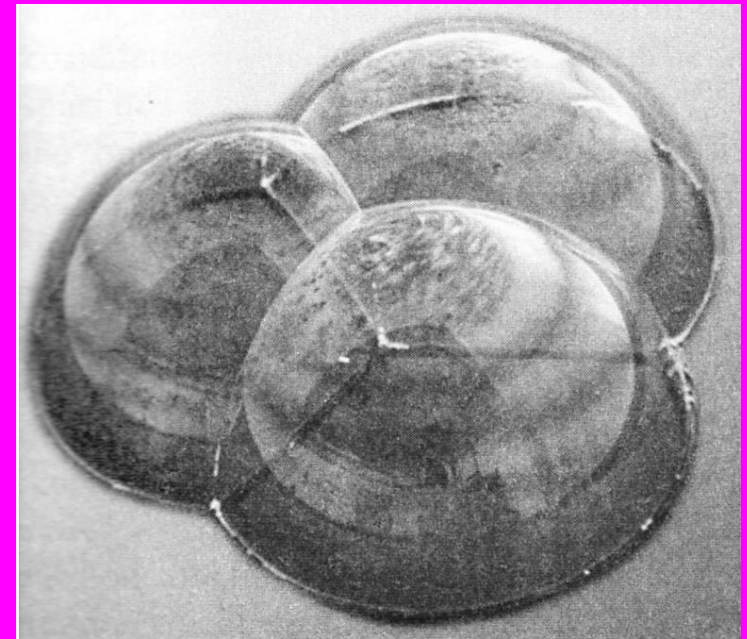
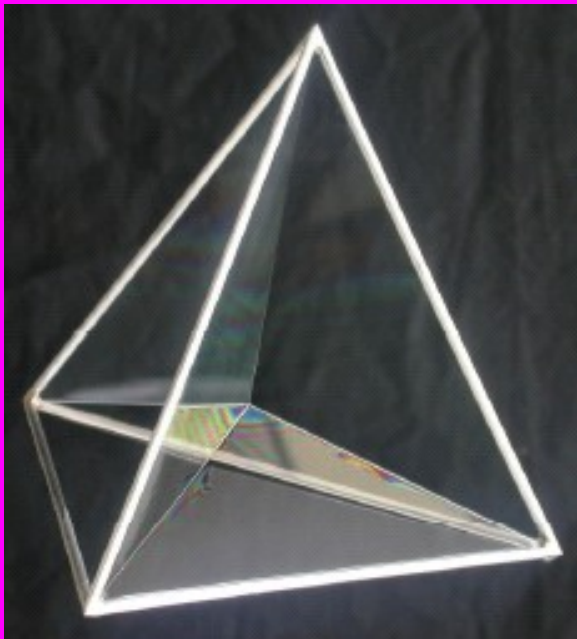
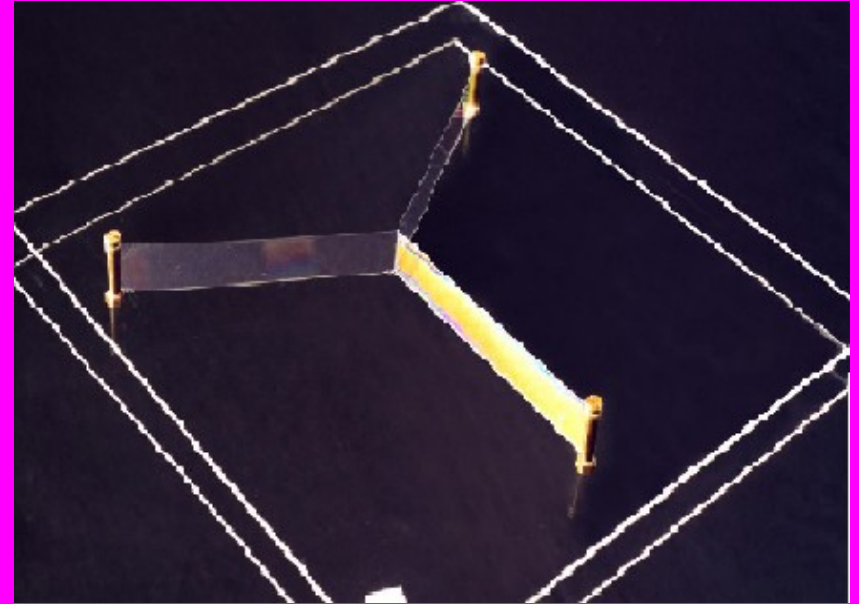
Questo punto ha talmente tante proprietà che meriterebbe di essere considerato alla pari dei famosi quattro punti notevoli del triangolo, *baricentro, ortocentro, incentro e circocentro*

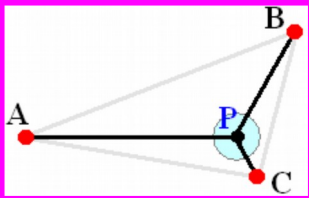


Il problema della rete stradale

**La natura conosce
bene la soluzione**

Angoli diedri di 120° formati
dalle lamine di liquido saponoso,
per ridurre il più possibile la
tensione superficiale





Il problema della rete stradale

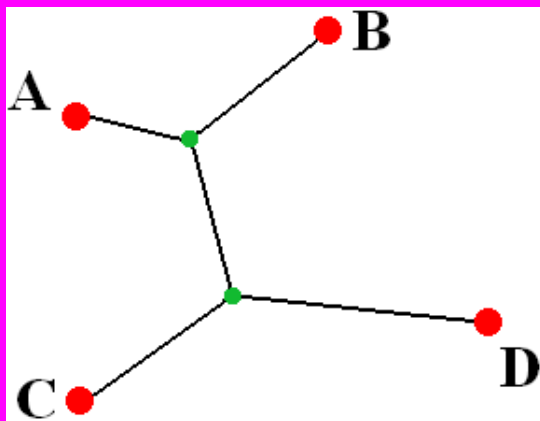
Nel secolo successivo (XVIII) il problema fu generalizzato da Steiner al caso di un numero qualsiasi di punti da collegare.

La versione più generale del problema, nella quale è consentito di utilizzare anche più di un singolo nodo, è la seguente:

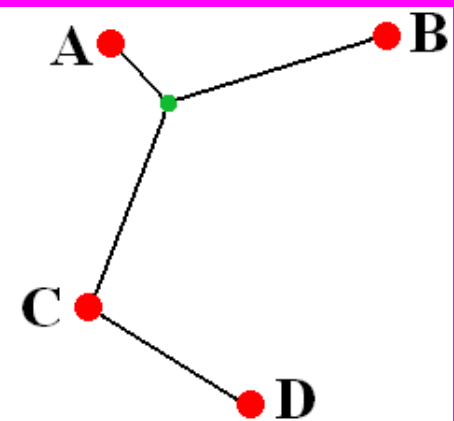
Dati n punti, trovare un sistema connesso di segmenti di minima lunghezza complessiva tale che ogni punto sia collegato con tutti gli altri.

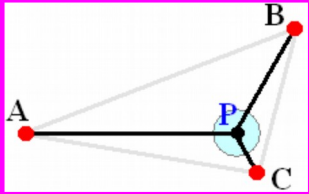
La soluzione varia notevolmente in base alla posizione dei punti, e la complessità cresce esponenzialmente al crescere del loro numero.

Una **regola generale** è che *non sono mai necessari più di $n-2$ nodi, e in ciascuno di essi si incontrano sempre tre rette che formano angoli di 120°*



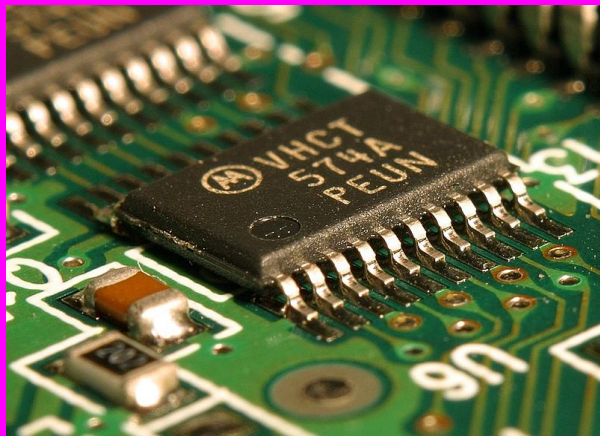
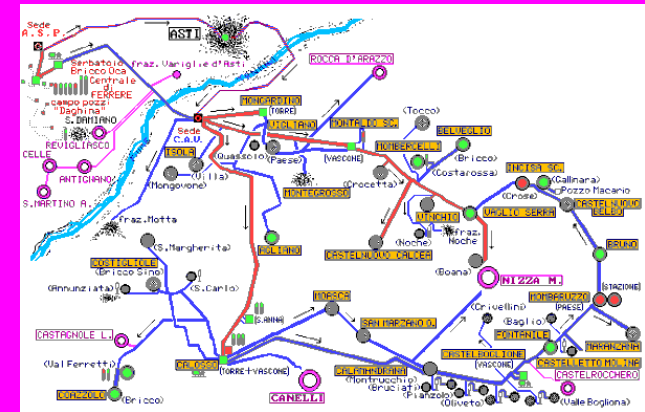
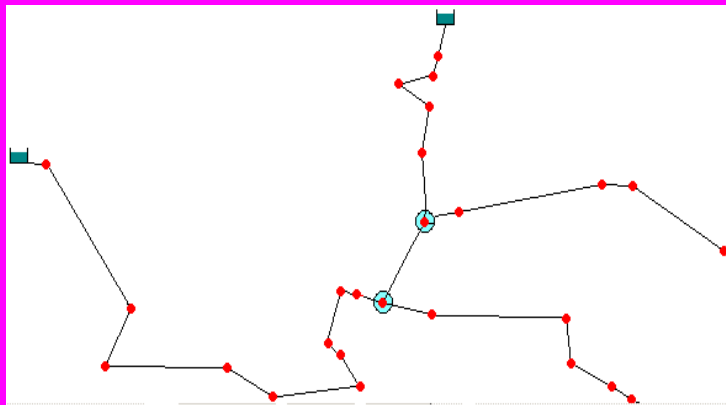
Esempi di reti stradali
minime che collegano
quattro città



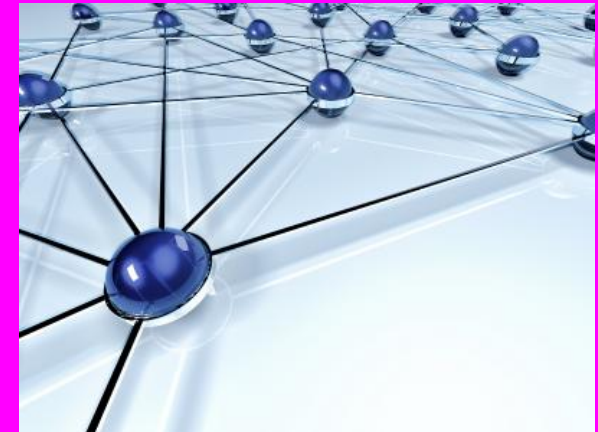


Il problema della rete stradale

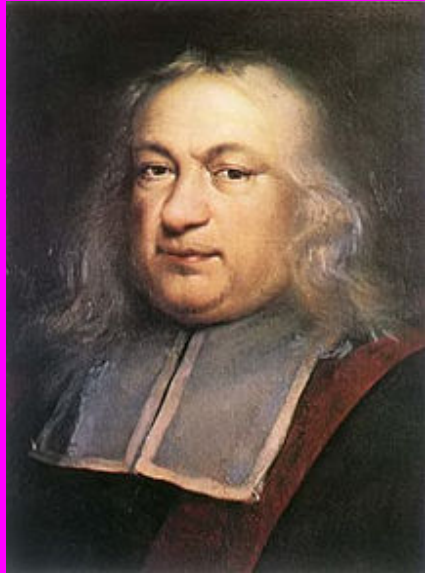
Invece che alle reti stradali, si può pensare a quelle idriche, elettriche, telefoniche, o ancora alle condutture del gas



Oppure ai grovigli di fili sottilissimi che collegano i milioni di transistor presenti su un microchip per computer



A proposito di Fermat



Un'equazione diofantea molto indagata

L'ultimo Teorema di Fermat afferma che, **dato $n > 2$, non esistono soluzioni intere positive dell'equazione:**

$$x^n + y^n = z^n$$

(Infinite soluzioni nel caso $n=2$:
(3,4,5), (5,12,13),)

L'enunciato fu formulato nel 1637 da Fermat, che lo scrisse ai margini di una copia dell'Arithmetica di Diofanto. E aggiunse:

"Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina".

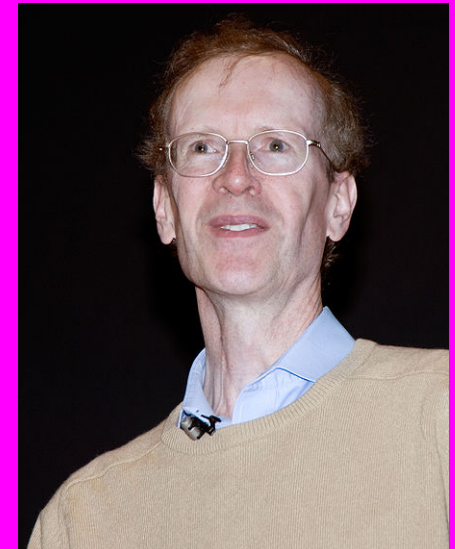


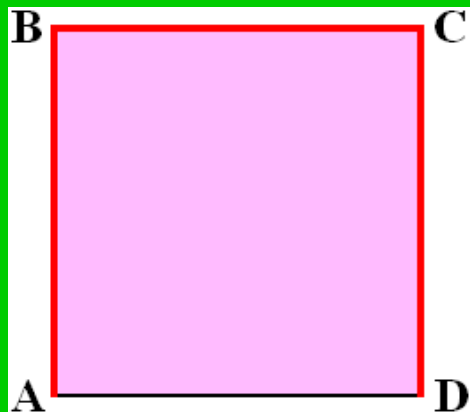
Diofanto di Alessandria, III d.C.

In seguito molti matematici hanno tentato di dimostrare il teorema

Solo nel 1994 l'inglese Andrew Wiles, dopo 7 anni di dedizione completa, riuscì finalmente a trovare una dimostrazione, che fu poi pubblicata nel 1995. Egli dovette utilizzare elementi di matematica ed algebra moderna che Fermat non poteva conoscere.

La dimostrazione di Wiles occupa 130 pagine ed è considerata al di là della comprensione della maggior parte dei matematici di oggi. Quella che Fermat affermava d'aver trovato, ammesso che fosse corretta, era certamente diversa. Ma quasi tutti i matematici sono dell'idea che Fermat si sia sbagliato. La soluzione di Wiles fu premiata con numerosi premi, tra cui il Premio Wolfskehl nel 1996 e il premio Abel nel 2016.



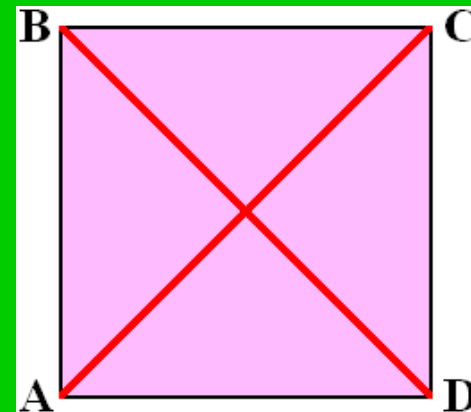


$AB = BC = CD = \dots\dots\dots$

$AB + BC + CD = \dots\dots\dots$

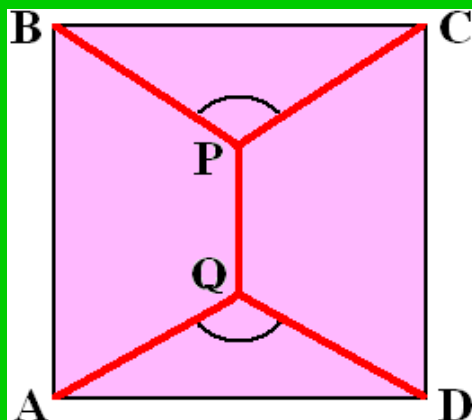
Tutti questi quadrati hanno il lato di 100 metri.
Gli angoli indicati con l'archetto hanno ampiezza di 120° .

Per ciascuna figura, calcola la somma delle lunghezze dei segmenti rossi



$AC = BD = \dots\dots\dots$

$AC + BD = \dots\dots\dots$

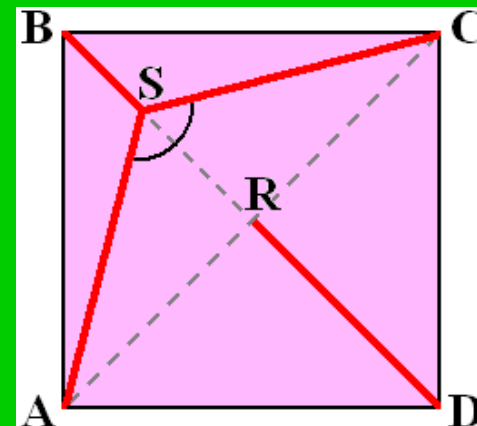


$BP = CP = AQ = DQ = \dots\dots\dots$

$PQ = \dots\dots\dots$

$BP + CP + PQ + AQ + DQ = \dots\dots\dots$

Suggerimento: ricorda che nei triangoli rettangoli con angoli acuti di 30° e 60° il cateto minore è metà dell'ipotenusa

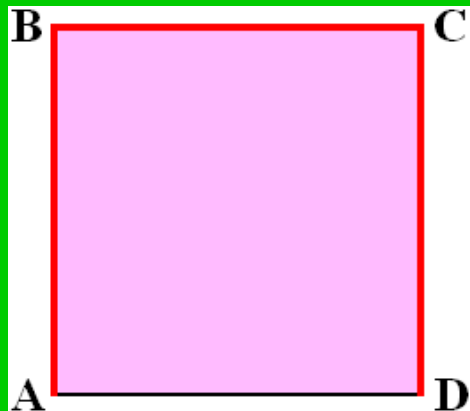


$DR = \dots\dots\dots$ $BS = \dots\dots\dots$

$AS = CS = \dots\dots\dots$

$DR + BS + AS + CS = \dots\dots\dots$

IL PROBLEMA DEL QUADRATO OPACO

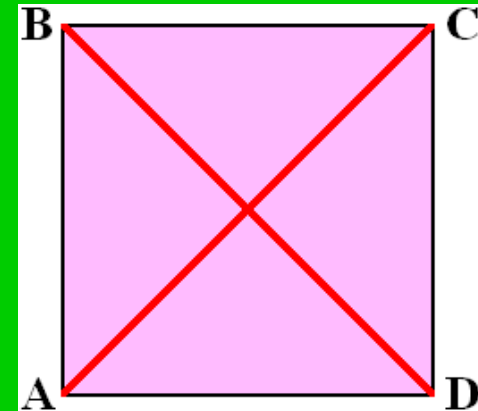


$$AB = BC = CD = 100$$

$$AB + BC + CD = 300$$

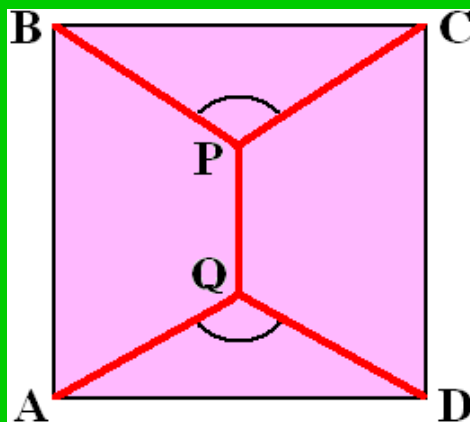
Tutti questi quadrati hanno il lato di 100 metri.
Gli angoli indicati con l'archetto hanno ampiezza di 120° .

Per ciascuna figura, calcola la somma delle lunghezze dei segmenti rossi



$$AC = BD = 141,41$$

$$AC + BD = 282,8$$

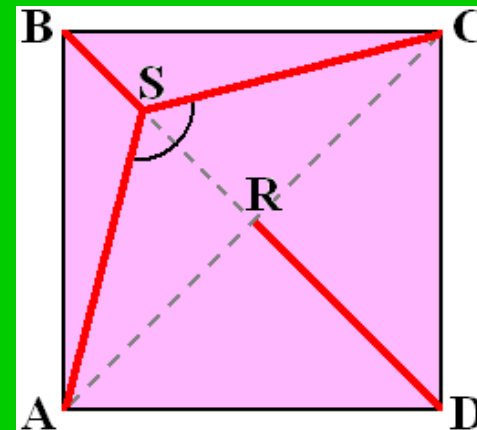


$$BP = CP = AQ = DQ = 57,74$$

$$PQ = 42,26$$

$$BP + CP + PQ + AQ + DQ = 273,2$$

Suggerimento: ricorda che nei triangoli rettangoli con angoli acuti di 30° e 60° il cateto minore è metà dell'ipotenusa



$$DR = 70,71 \quad BS = 29,89$$

$$AS = CS = 81,65$$

$$DR + BS + AS + CS = 263,9$$

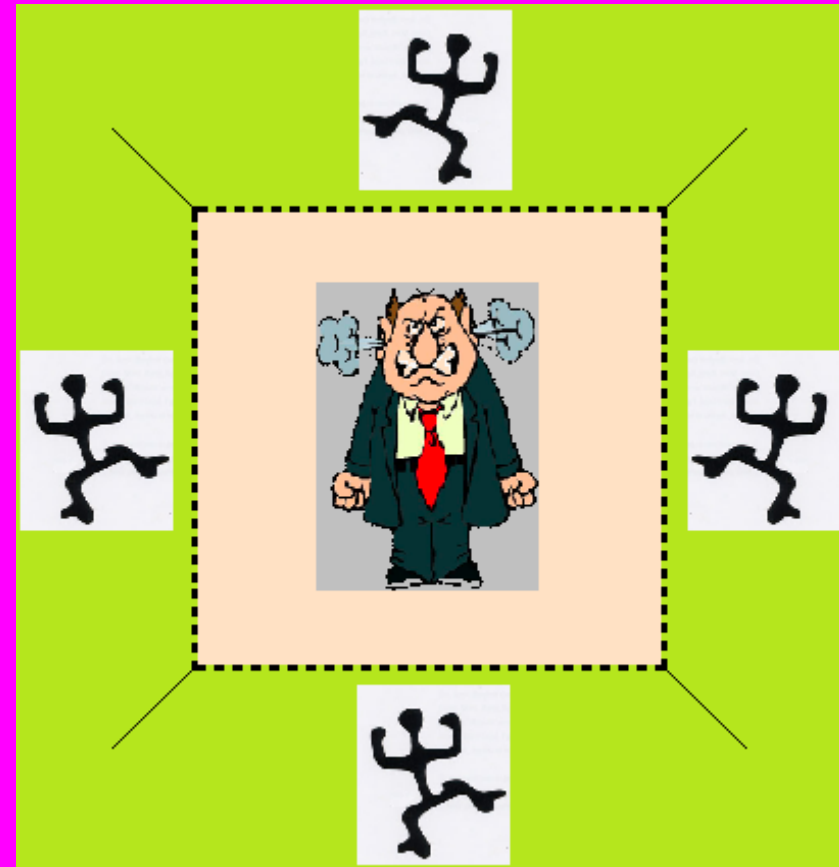
L'ottimizzazione nella storia

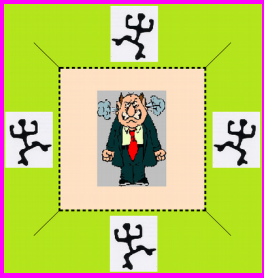
Il problema del quadrato opaco

Steiner si occupò anche del problema del quadrato opaco

Il proprietario di un terreno di forma quadrata non vuole che i suoi quattro confinanti comunichino fra di loro attraverso la sua proprietà.

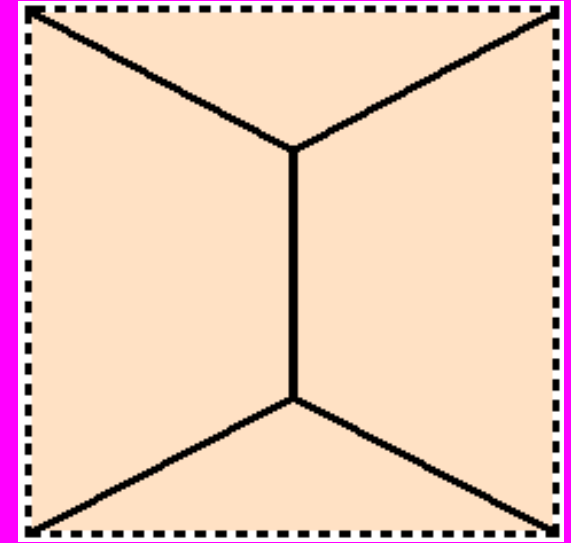
Perciò decide di costruire dei muri, cercando di ridurre al minimo i costi.





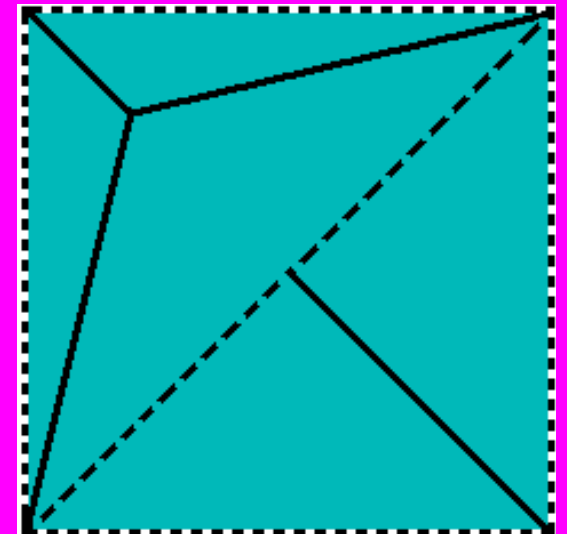
Il problema del quadrato opaco

Steiner risolse il problema con un muro lungo circa 273 metri (in un quadrato con lati di 100 metri).

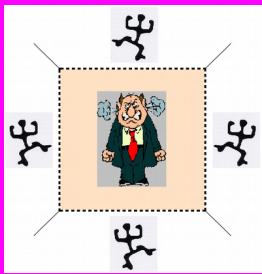


L'albero di Steiner

Alcuni decenni dopo un insegnante di scuola secondaria, seguendo le indicazioni di alcuni suoi alunni, trovò una soluzione migliore, riducendo la lunghezza di circa 9 metri (ma con un muro non connesso). Successivamente è stato dimostrato che questa è la soluzione migliore in assoluto.



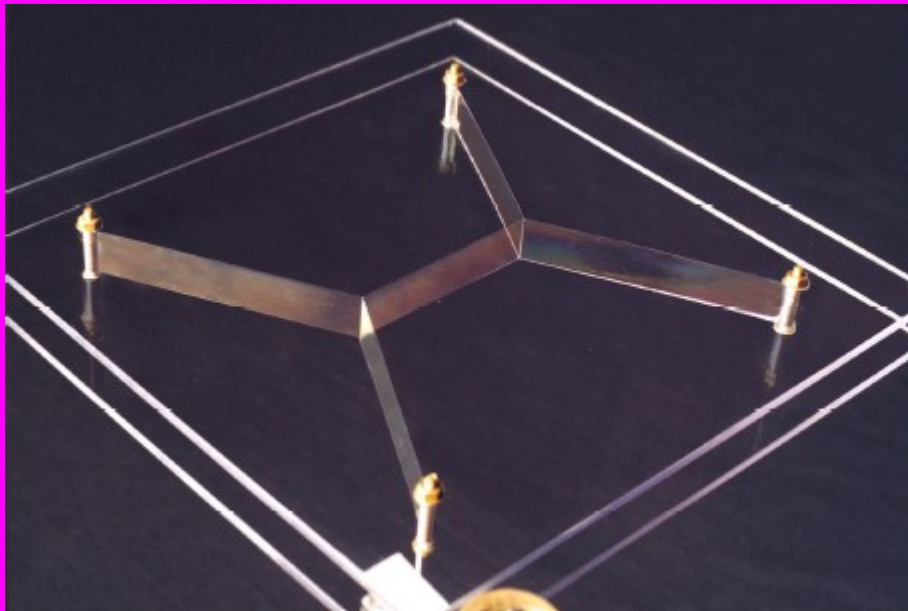
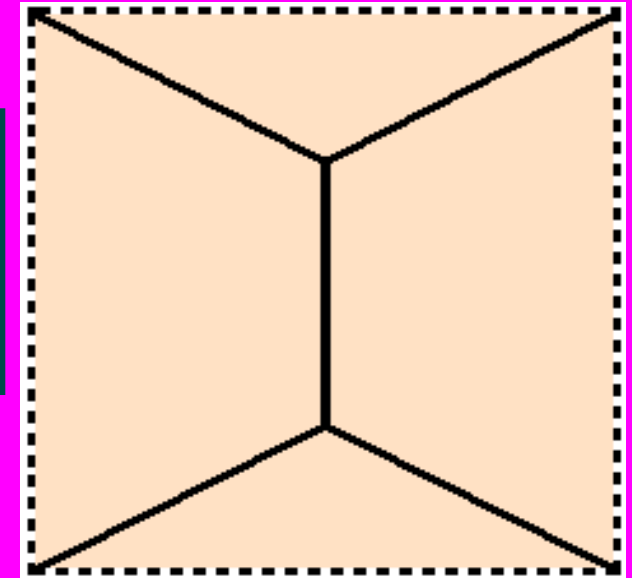
La soluzione di Poirier



Il problema del quadrato opaco

La natura conosce
bene la soluzione

Soluzione di
Steiner per il
miglior muro
connesso



Le lamine saponose trovano
il modo di congiungere i
quattro pioli riducendo al
minimo la tensione superficiale.
Ricompaiono gli angoli di 120°

L'ottimizzazione nella storia

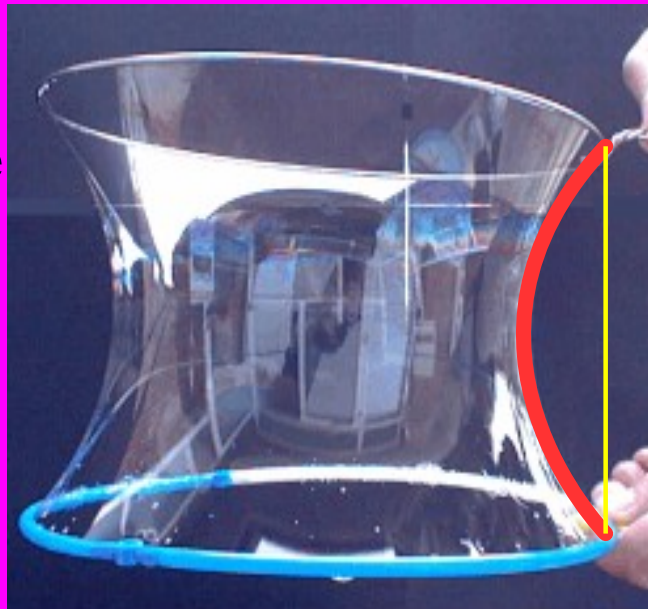
Le superfici minime di Plateau

Intorno alla metà del XIX secolo il fisico belga Plateau iniziò lo studio delle forme assunte dalle lamine di acqua saponata.

Doveva farsi aiutare da familiari ed assistenti, poiché era quasi completamente cieco.

Una superficie fra due circonferenze

La superficie minima avente per bordo le due circonferenze non è la superficie cilindrica: il profilo laterale non è un segmento ma un arco di
catenaria.

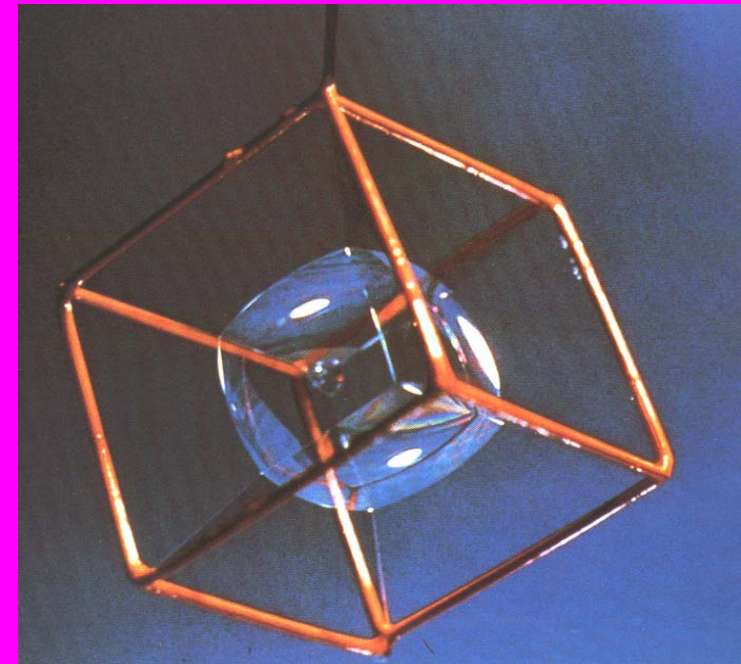


catenoide



elicoide

ipercubo



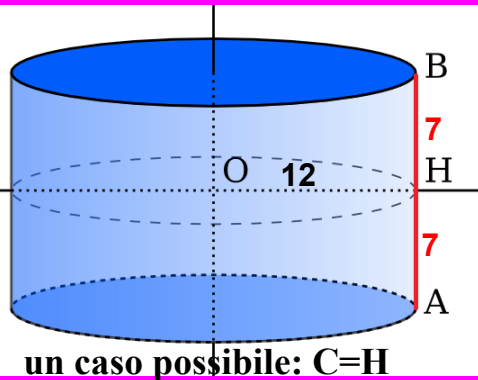
ipercubo

La catenoide



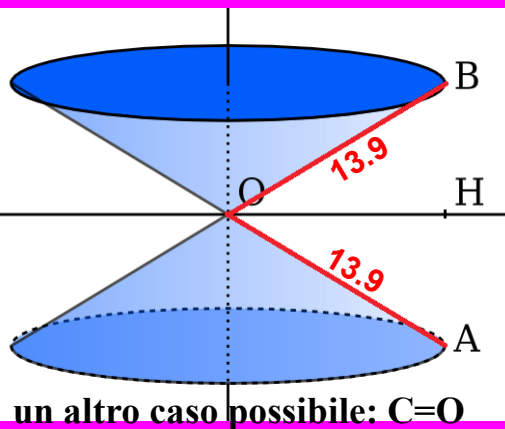
**Assumiamo
BH=AH=7 OH=12**

Problema. Trovare il punto C fra O ed H tale che la spezzata BCA generi la superficie minima



Il segmento BHA genera per rotazione una superficie cilindrica

$$S(12)=336,0\pi$$



La spezzata BOA genera una superficie conica a due falde

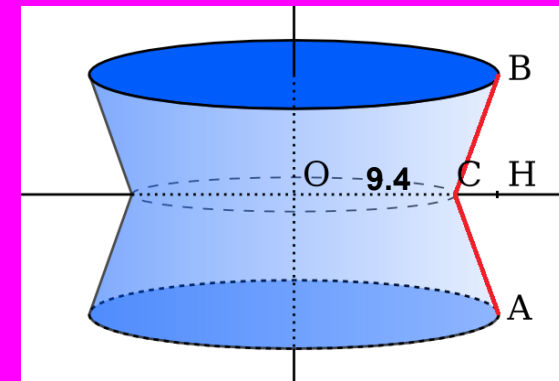
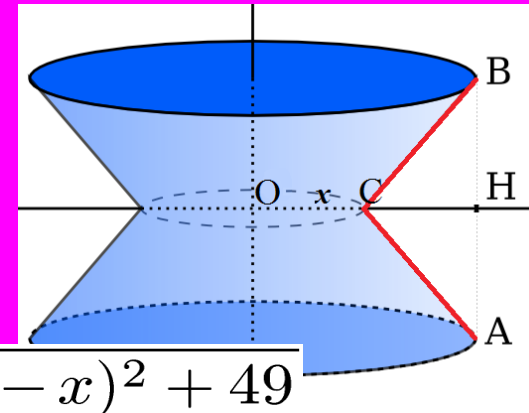
$$S(0)=333,4\pi$$

Se x è l'ascissa di C e $S(x)$ è l'area della superficie generata, otteniamo

$$S(x) = 2\pi(12 + x)\sqrt{(12 - x)^2 + 49}$$

**Il minimo di $S(x)$
si ha per $x=9,4$**

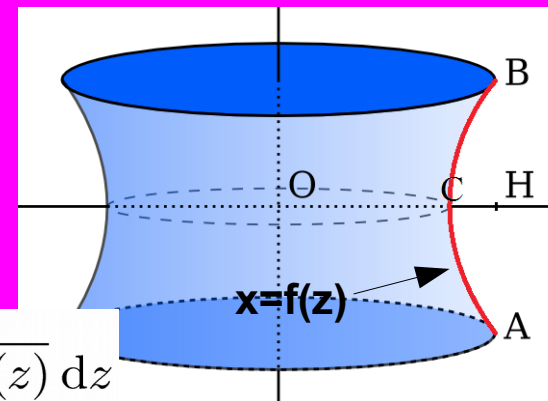
$$S(9,4)=319,6\pi$$



E se invece si fa ruotare un profilo curvilineo?

Qui si tratta di minimizzare l'area della superficie al variare della curva $x=f(z)$
L'area della superficie è espressa dal funzionale

$$S(f) = 2\pi \int_{-7}^7 f(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2} dz$$

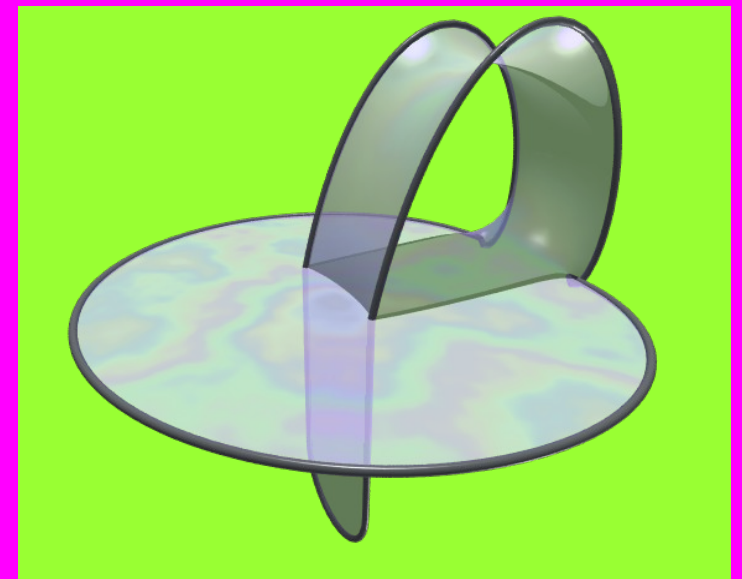
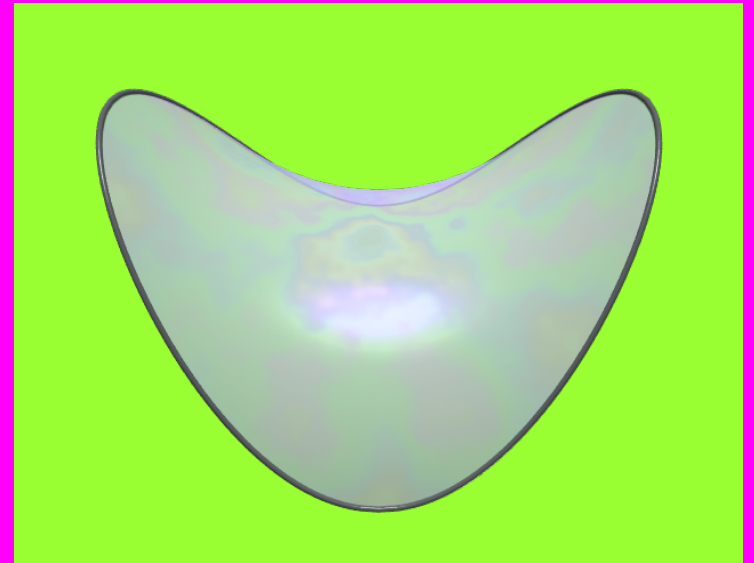
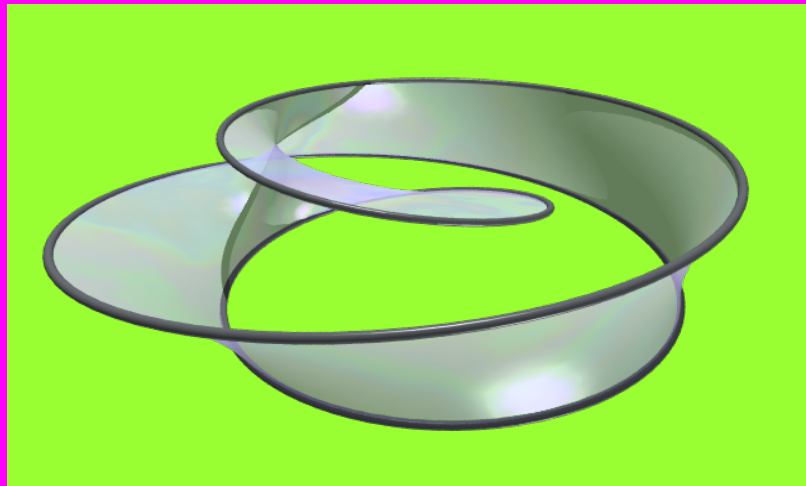


**Accade a volte che
segmenti più lunghi
generano superfici
meno estese!**

Le superfici minime di Plateau

Sfruttando le proprietà fisiche dell'acqua saponata, Plateau costruisce numerosi modelli di *superfici minime*.

Da allora il problema di trovare la superficie di area minima fra tutte quelle aventi un bordo assegnato è detto *Problema di Plateau*.



Le tensostrutture minimali di Otto Frei

L'architetto tedesco **Otto Frei**, attivo nel 1900, ha fatto grande uso delle pellicole saponose nella progettazione delle cosiddette “costruzioni leggere”.

Per ottenere le superfici minimali, egli utilizzava degli aghi conficcati in una placca di plexiglas e ne collegava le estremità libere con fili sottilissimi; quindi immergeva il dispositivo in una soluzione saponata e riusciva così ad ottenere la pellicola fluida di area minima adagiata sui fili.

Nelle costruzioni reali si trattava poi di sostituire gli aghi con piloni di sostegno, i fili con cavi di acciaio e la pellicola fluida con una **tensostruttura** in materiale sintetico trasparente.



**Padiglione della Germania Ovest
Expo '67 di Montreal**



**Copertura dello Stadio Olimpico
Monaco di Baviera.**

L'ottimizzazione nella storia

Massimi e minimi vincolati

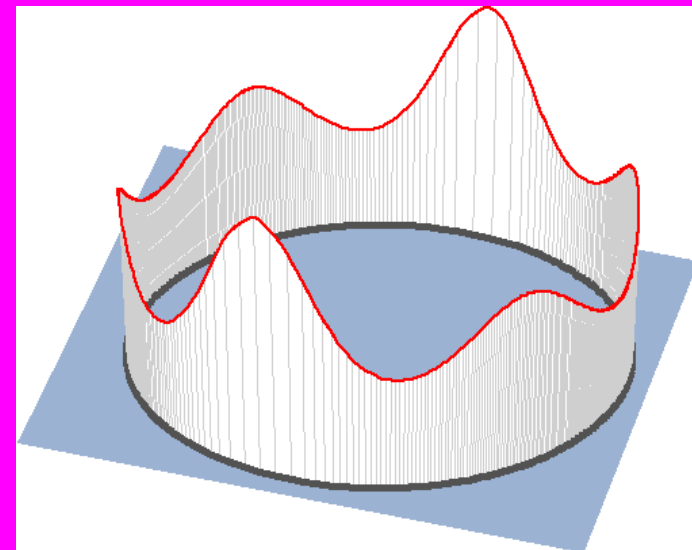
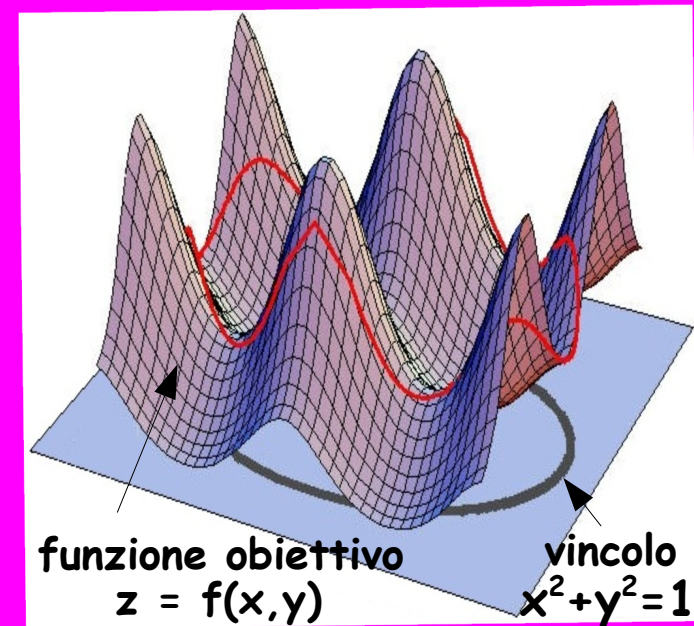
Nel secolo XIX si sviluppa il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per il calcolo dei punti di minimo e di massimo vincolati.

Il problema è quello di calcolare il minimo ed il massimo dei valori assunti ad esempio da una funzione di 2 variabili su una curva contenuta nel dominio della funzione.

Il metodo fu introdotto da Lagrange alla fine del XVIII secolo e si sviluppò ampiamente nel secolo successivo.

Nel caso quadridimensionale, la funzione obiettivo dipende da tre variabili, $t = f(x,y,z)$, e il vincolo può essere una curva o una superficie.

Il problema si generalizza al caso di funzioni di n variabili su varietà k -dimensionali, con $k < n$.



L'ottimizzazione nella storia

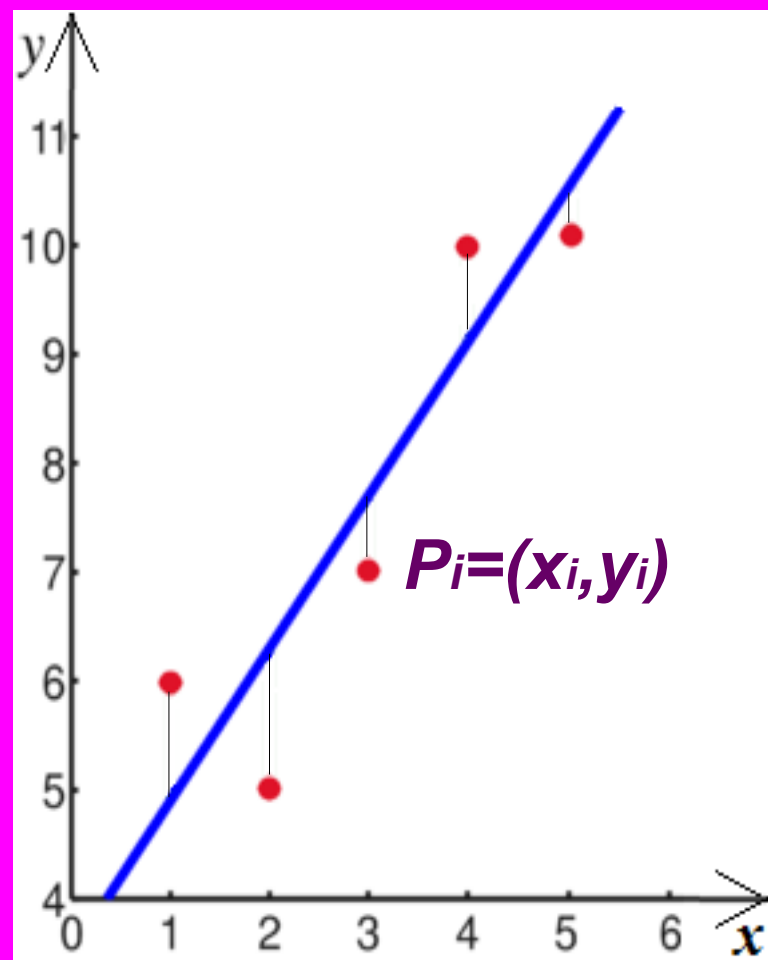
La retta dei minimi quadrati

Nel secolo XIX si sviluppa anche il **metodo dei minimi quadrati** per il calcolo della retta che meglio di ogni altra si adatta a rappresentare una nuvola di punti assegnati nel piano.

I punti siano n , di coordinate (x_i, y_i) .
La retta cercata è $y = mx + q$, dove le incognite sono m e q .

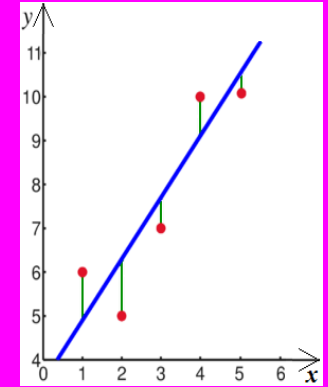
L'idea è quella di minimizzare la somma dei quadrati delle distanze verticali punto-retta.

$$S(m, q) = \sum_{i=1}^n (mx_i + q - y_i)^2$$



La retta dei minimi quadrati

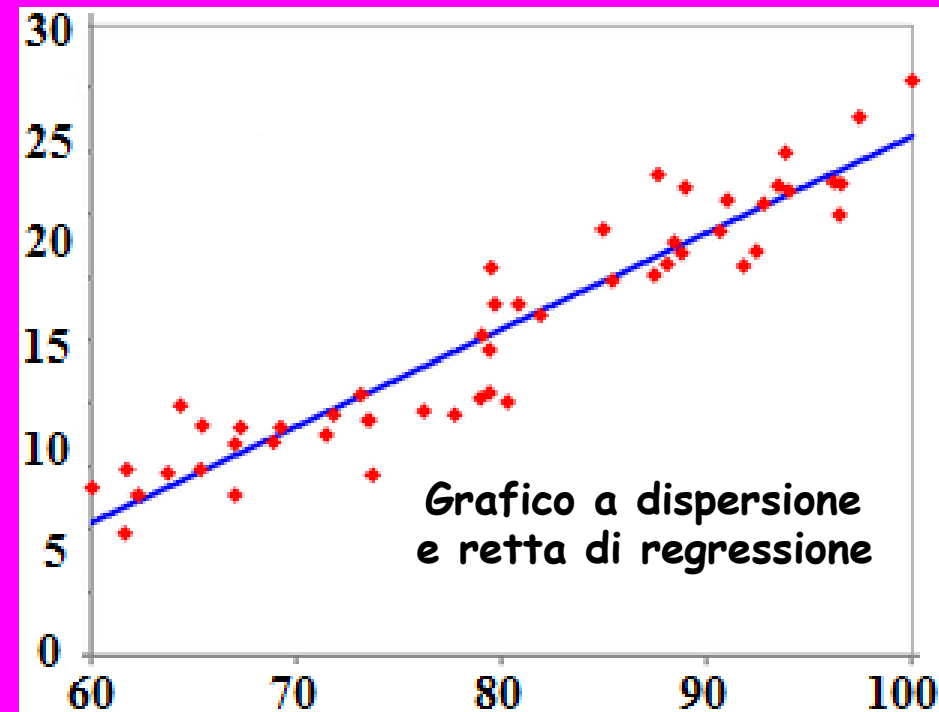
Ad esempio, dopo che sono stati assegnati i punteggi al test d'ingresso alla Facoltà di Scienze, si vuole stabilire se esiste una **correlazione** fra il **punteggio del test** e il **voto di maturità**.



Ogni studente viene rappresentato da un punto le cui coordinate sono il voto di maturità e il punteggio del test. Se la retta dei minimi quadrati si “adatta bene” alla nuvola dei dati, si conclude che le due valutazioni sono in sintonia.

La retta dei minimi quadrati è chiamata anche *retta di regressione*.

Nel XIX alcuni biologi accertarono mediante un'indagine statistica che la progenie di individui eccezionali (ad esempio troppo alti o troppo bassi) tende a presentare caratteristiche meno accentuate di quelle dei genitori. Francis Galton (cugino di Darwin) chiamò tale fenomeno *regressione verso la media*.

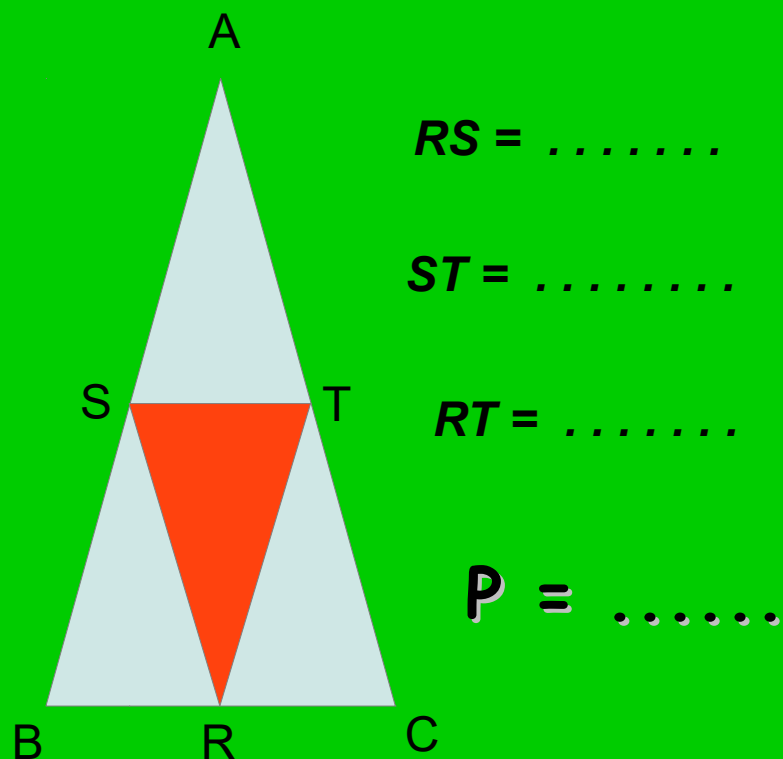


completare

TRIANGOLI INSCRITTI IN UN TRIANGOLO

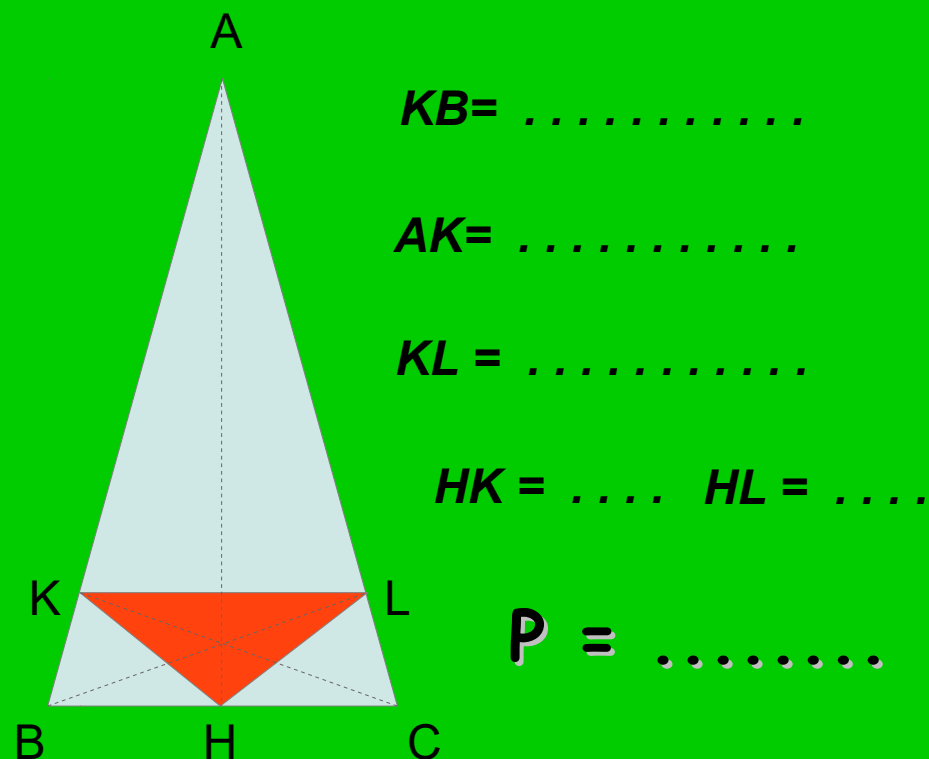
E' dato il triangolo ABC , con $AB=AC=25$ e $BC=14$

Calcola il perimetro del triangolo
avente come vertici i punti medi
dei lati del triangolo dato



Calcola il perimetro del triangolo
avente come vertici i piedi delle
altezze del triangolo dato

[Si consideri acquisito il fatto che
gli angoli BHK e BAC sono uguali]

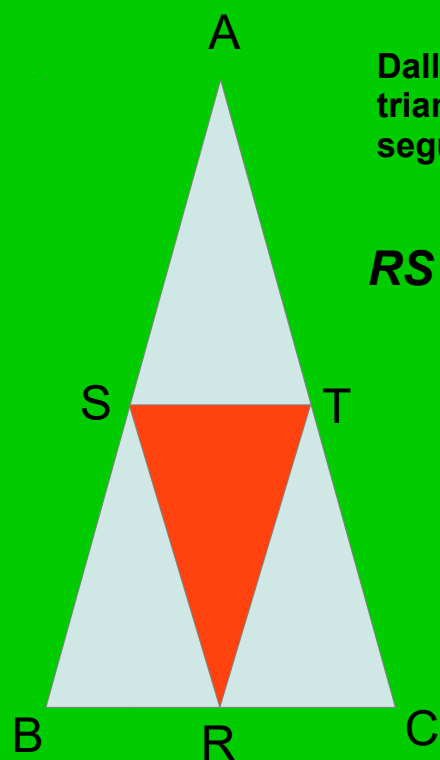


risultati

TRIANGOLI INSCRITTI IN UN TRIANGOLO

E' dato il triangolo ABC , con $AB=AC=25$ e $BC=14$

Calcola il perimetro del triangolo
avente come vertici i punti medi
dei lati del triangolo dato



Dalla similitudine dei
triangoli RST e ABC
segue

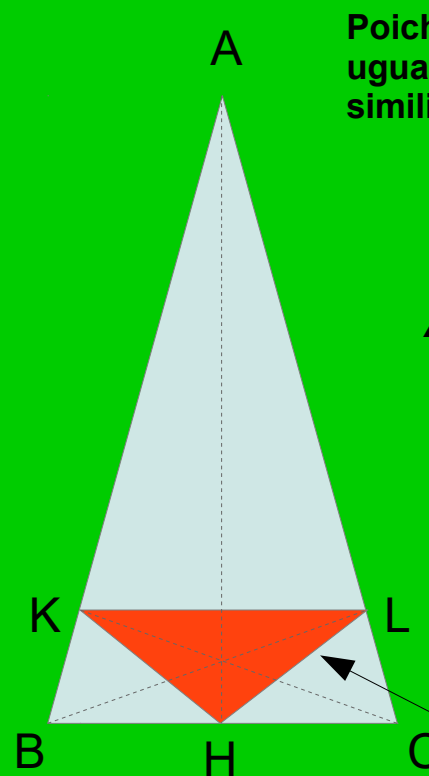
$$RS = RT = 25/2 = 12,5$$

$$ST = 7$$

$$P = 32$$

Calcola il perimetro del triangolo
avente come vertici i piedi delle
altezze del triangolo dato

[Si consideri acquisito il fatto che
gli angoli BHK e BAC sono uguali]



Poiché gli angoli BHK e BAC sono
uguali, i triangoli BHK e BAC sono
simili.

Da $KB : BH = BC : AB$ segue

$$KB = 3,92$$

$$AK = AB - KB = 21,08$$

Da $BC : KL = AB : AK$ segue

$$KL = 11,80$$

$$HK = HB = 7 \quad HL = 7$$

$$P = 25,8$$

triangolo
ortico

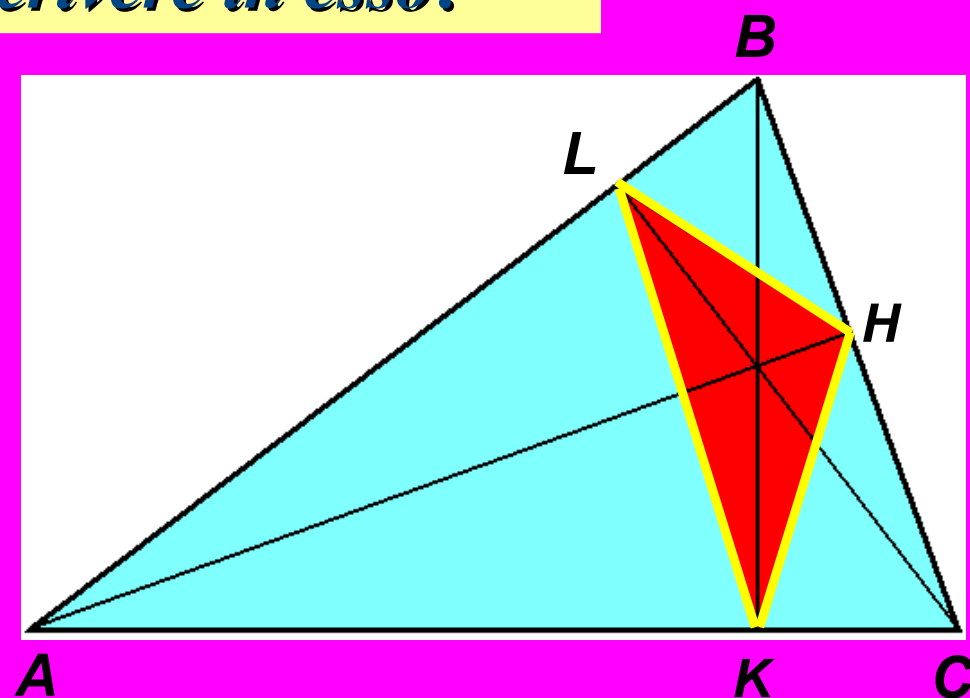
L'ottimizzazione nella storia

Il problema del triangolo di minimo perimetro

Dato un triangolo acutangolo, qual è il triangolo di perimetro minimo che si può inscrivere in esso?

Il problema fu risolto da Hermann Schwarz intorno alla fine del 1800:

Il triangolo di perimetro minimo è il triangolo ortico, cioè quello avente come vertici i piedi delle altezze del triangolo assegnato



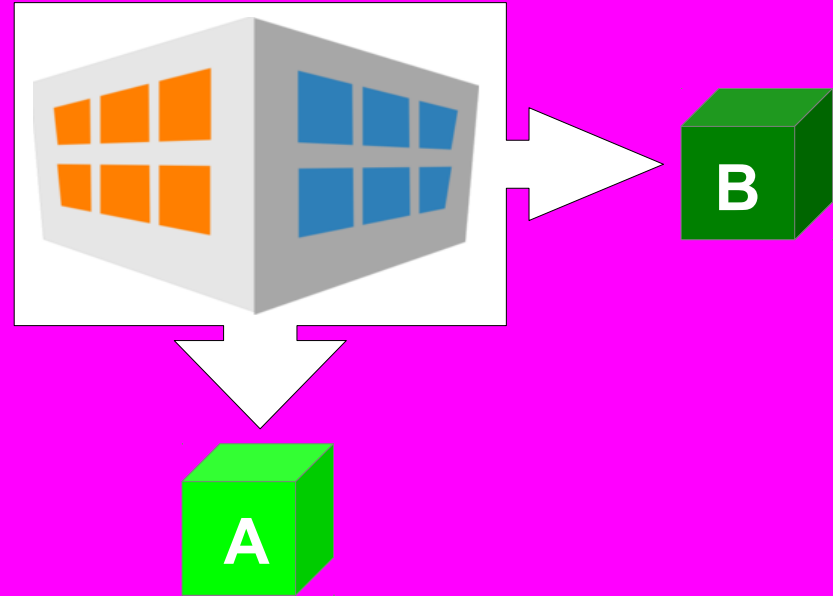
Immaginiamo che i lati del triangolo ABC siano specchi.

Il triangolo ortico è l'unico **triangolo di luce** inscritto nel triangolo dato, cioè l'unico percorso chiuso che un raggio di luce può compiere toccando una sola volta ogni specchio

L'ottimizzazione nella storia

La programmazione lineare

Un'impresa produce un articolo in due modelli, **A** e **B**, che richiedono entrambi sia del Lavoro–Operaio sia del Lavoro–Macchina. Il modello **A** richiede 40 minuti di Lavoro–Operaio e 12 minuti di Lavoro–Macchina; il modello **B** richiede 30 minuti di Lavoro–Operaio e 24 minuti di Lavoro–Macchina. In una giornata lavorativa sono disponibili 200 ore di Lavoro–Operaio e 95 ore di Lavoro–Macchina. Il profitto è di 9 euro per il prodotto di tipo **A** e di 10 euro per il prodotto di tipo **B**.



Si vuol sapere quanti pezzi del modello A e quanti pezzi del modello B l'azienda deve produrre giornalmente per avere il massimo profitto.

La programmazione lineare

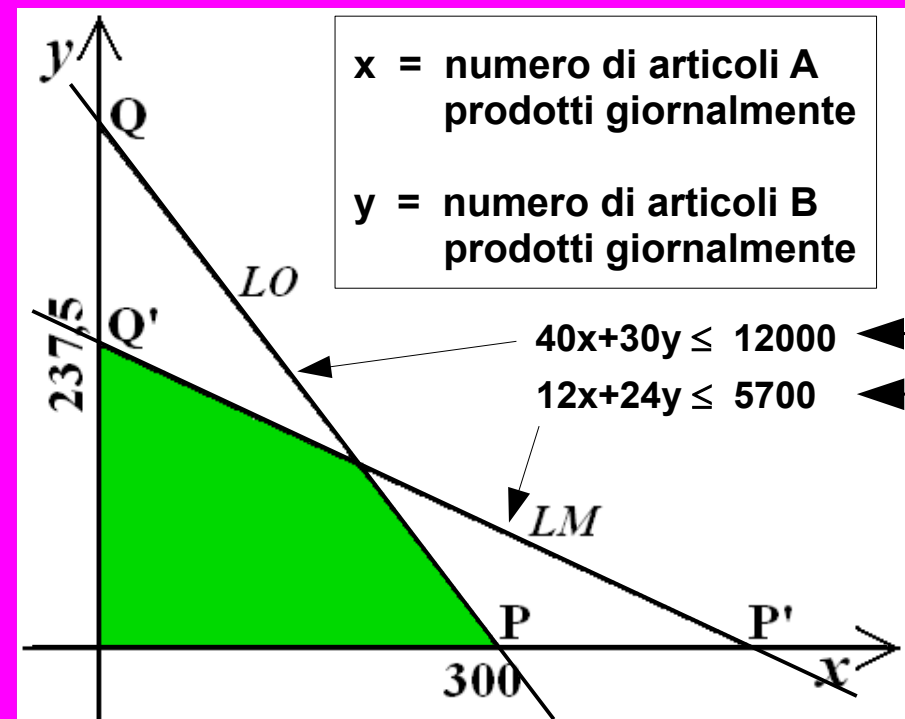
	L.O.	L.M.	Profitto
disponibilità in minuti	12.000	5.700	
A	40	12	9
B	30	24	10

Il problema è quello di determinare la combinazione (x;y) che rende massimo il valore della *funzione obiettivo*

$$P(x;y) = 9x + 10y$$

al variare di x ed y nella *regione ammissibile*

La funzione obiettivo è un polinomio di 1° grado in due variabili e la regione ammissibile è un poligono convesso



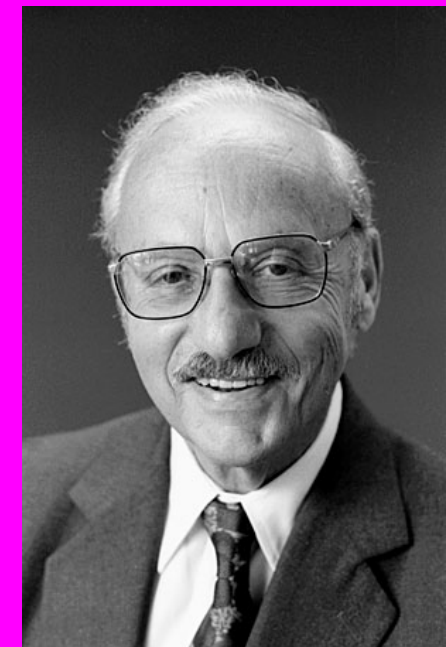
La programmazione lineare

I primi passi nel campo della programmazione lineare furono compiuti da un giovane professore di Leningrado, Leonid V. Kantorovich (1912-1996), che nel 1936 fu contattato da un'azienda produttrice di legno compensato con la richiesta di ottimizzare l'uso del macchinario.



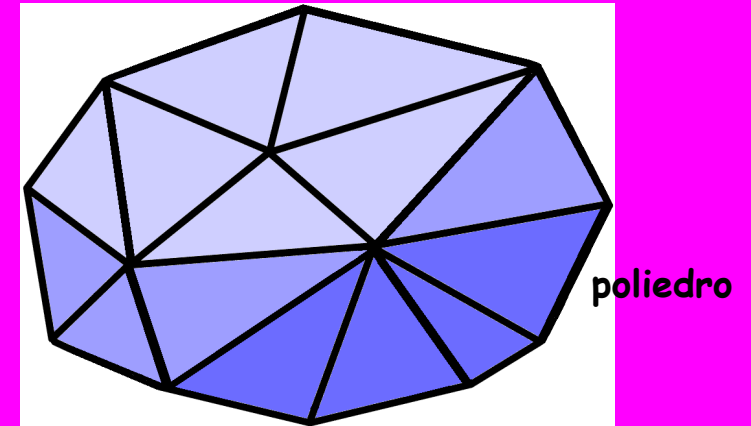
Ma il vero fondatore della programmazione lineare è considerato George B. Dantzig (1914-2005), che durante la seconda guerra mondiale fu al servizio dell'Aeronautica Militare degli Stati Uniti.

Di lui si narra che, all'età di 24 anni, dottorando a Berkeley, una mattina arrivò in aula con pochi minuti di ritardo, durante i quali il prof aveva scritto alla lavagna quattro importanti problemi di statistica ancora insoluti. Il giovane Dantzig pensò che quei problemi fossero compiti per casa e fece in tempo ad annotarne due, che nel giro di pochi giorni riuscì a risolvere in maniera completa.

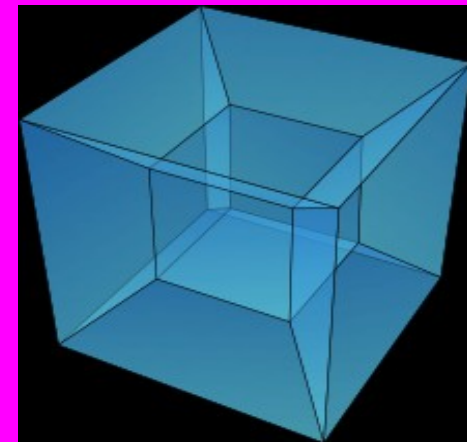


PROGRAMMAZIONE LINEARE CON PIU' DI DUE VARIABILI

Se il numero delle variabili sale da due a tre, la regione ammissibile non è un poligono del piano ma un **poliedro** dello spazio tridimensionale



Se il numero delle variabili sale a quattro o più, la regione ammissibile è un **ipersolido** dello spazio a quattro o più dimensioni, chiamato *politopo*, che non possiamo rappresentare nello spazio fisico da noi percepito



Quando il numero delle variabili e dei vincoli è molto elevato, la risoluzione del problema richiede un'enorme quantità di calcoli. Dantzig nel 1947 scoprì un metodo, il *metodo del simplesso*, che consente di abbreviare notevolmente il lavoro.

Il metodo del simplesso è considerato uno degli algoritmi più importanti del XX secolo.

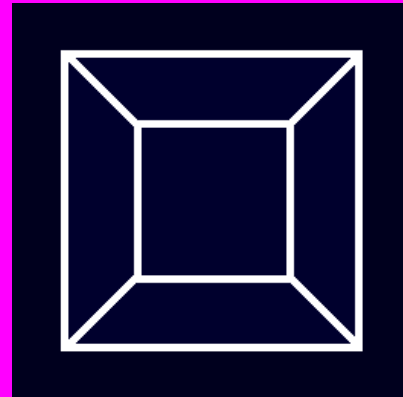
DAL CUBO ALL'IPERCUBO

C
U
B
O

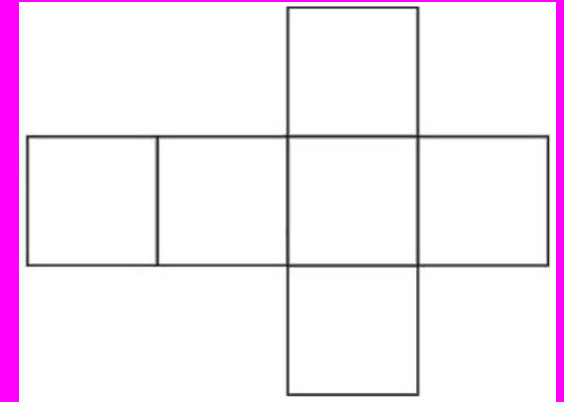
TRI
DI
MEN
SIO
NA
LE



immagine reale



modello bidimensionale
faccia vicina: quadrato grande
faccia lontana: quadrato piccolo
altre 4 facce: trapezi



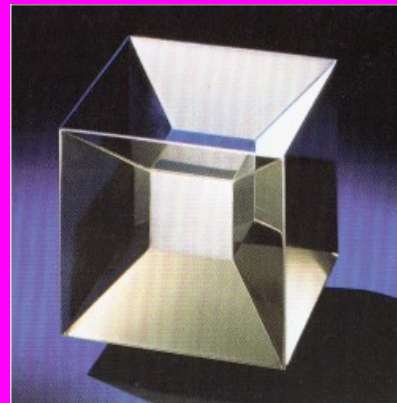
sviluppo in due dimensioni
della superficie del cubo
(sei facce quadrate)

C
U
B
O

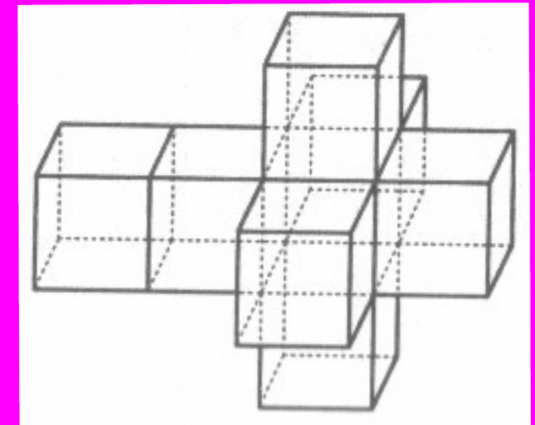
QUA
DRI
DI
MEN
SIO
NA
LE



immagine reale



modello tridimensionale
faccia vicina: cubo grande
faccia lontana: cubo piccolo
Altre 6 facce: tronchi di piramide



sviluppo in tre dimensioni
della ipersuperficie dell'ipercubo
(otto facce cubiche)

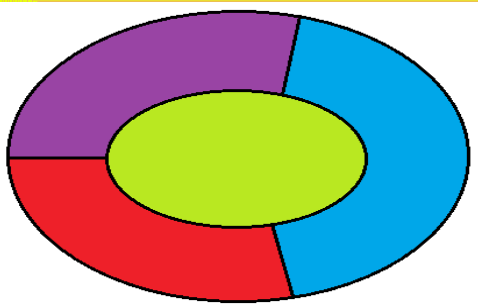
L'ottimizzazione nella storia

Il teorema dei quattro colori

Qual è il numero minimo di colori che consentono di colorare una qualsiasi cartina geopolitica facendo in modo che due stati adiacenti siano distinti da colorazioni diverse?

Il problema fu proposto a De Morgan nel 1852 dal giovane Francis Guthrie, il quale, mentre stava colorando una mappa delle 49 contee britanniche, si era reso conto di dover usare almeno quattro colori.

Oggi sappiamo che quattro colori sono anche sempre sufficienti



Questa cartina dimostra che tre colori non possono bastare: ogni regione confina con ciascuna delle rimanenti tre

La prima presunta dimostrazione fu formulata nel 1879 da Alfred Kempe; l'anno seguente Peter Tait annunciò di averne trovata un'altra.

Undici anni dopo, entrambe le dimostrazioni furono riconosciute errate.



Il teorema dei quattro colori

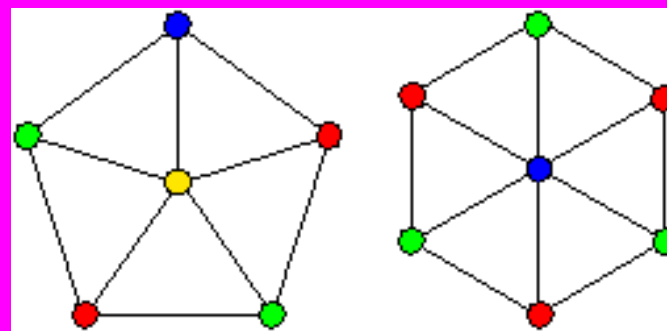
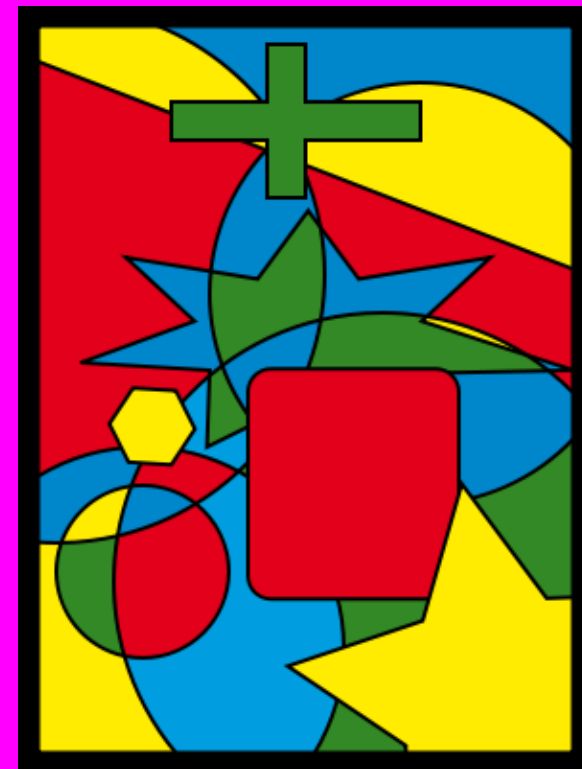
La dimostrazione definitiva arriva nel 1977 ad opera di Kenneth Appel e Wolfgang Haken, due matematici dell'Università dell'Illinois che hanno utilizzato un complesso algoritmo informatico.

Per evitare errori, il programma è stato eseguito su due diverse macchine con due algoritmi indipendenti.

Il lavoro dei computer è durato 50 giorni senza interruzioni. Sono servite più di 500 pagine per trascrivere a mano tutte le verifiche effettuate dalle macchine.

Il rivoluzionario utilizzo di algoritmi informatici ha scatenato grandi polemiche non solo sulla affidabilità di questi metodi ma anche sul concetto stesso di dimostrazione.

Infine, nel 2000, Ashay Dharwadkar ha proposto una nuova dimostrazione del teorema che richiede l'utilizzo della teoria dei grafi.



grafi colorati

Progetto Lauree Scientifiche

Magie, 25 gennaio 2017

OTTIMIZZAZIONE E DINTORNI

Cosimo De Mitri

- FINE TERZA PARTE -



Progetto Lauree Scientifiche

Liceo Scientifico “Leonardo da Vinci”
Maglie, 25 gennaio 2017

OTTIMIZZAZIONE

- Il problema del bagnino -

Cosimo De Mitri

- QUARTA PARTE -

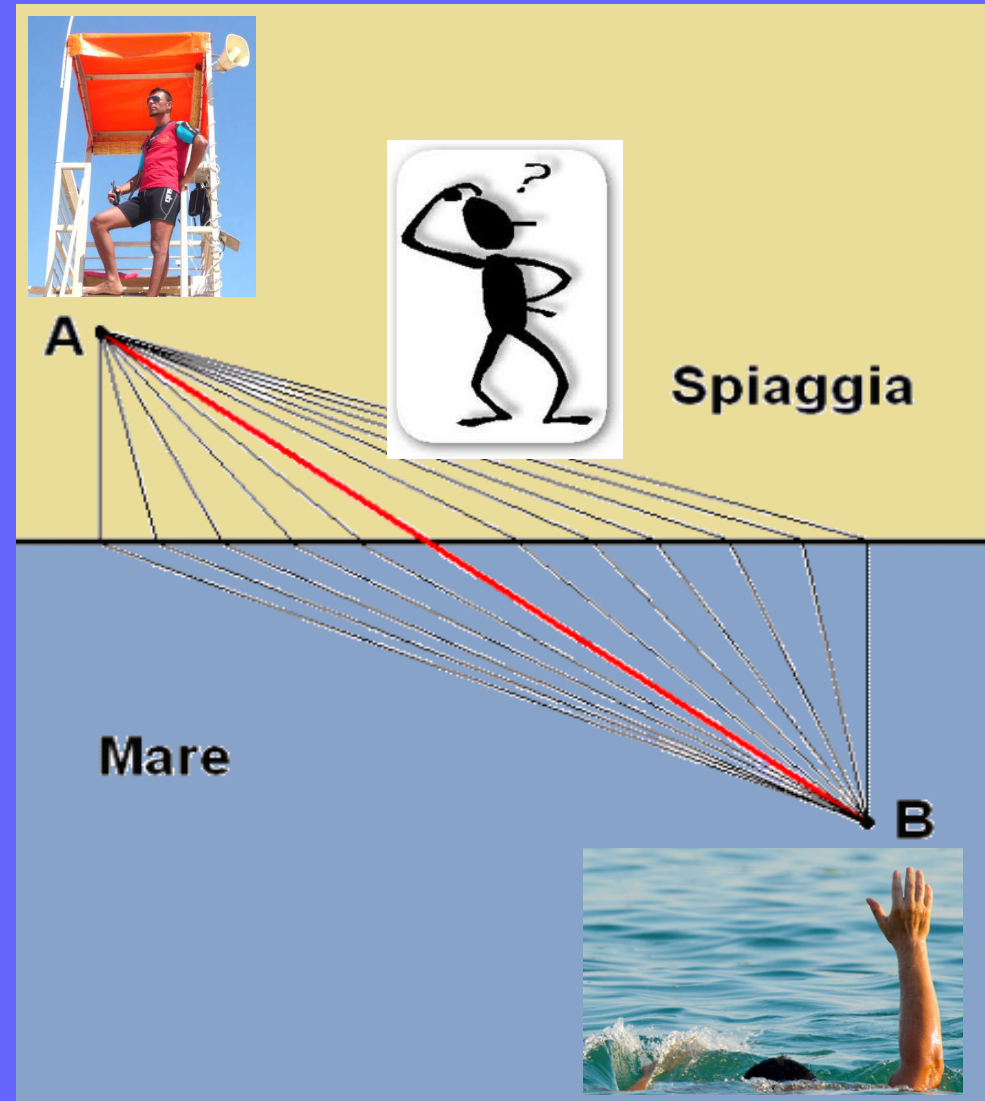


Il problema del bagnino

Il bagnino, la cui postazione si trova sulla spiaggia nel punto $A = (0;6)$, deve raggiungere il punto $B = (15;-6)$, dove un bagnante è in pericolo.

La velocità in mare è uguale alla metà rispetto alla velocità sulla spiaggia.

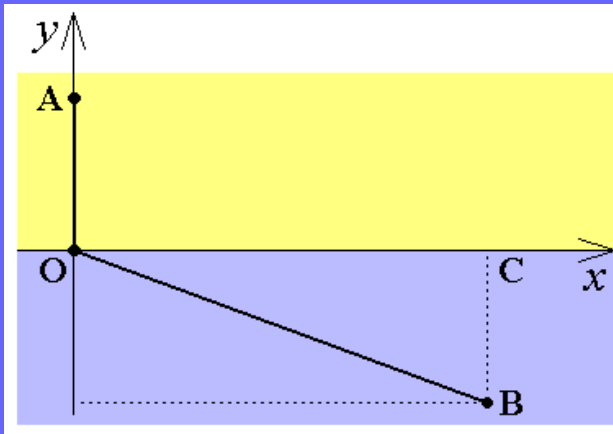
In quale punto il bagnino deve gettarsi in acqua se vuole coprire l'intero percorso nel minor tempo possibile?



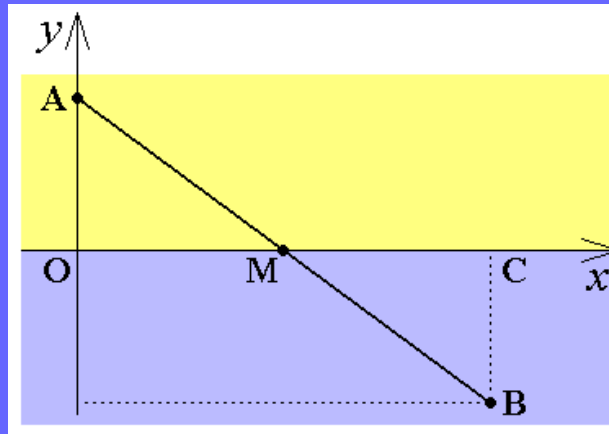
Il problema del bagnino

Tre possibili scelte

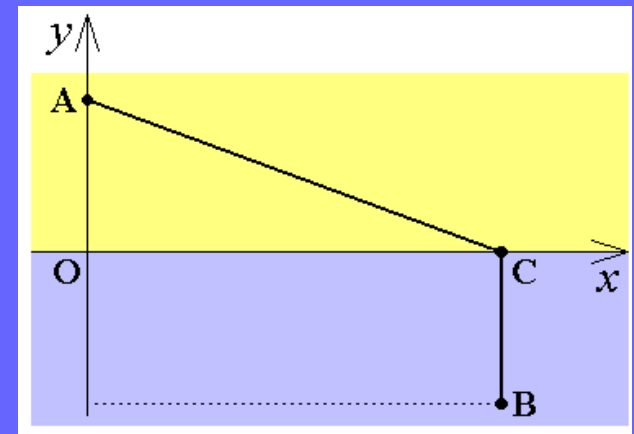
Percorso AOB



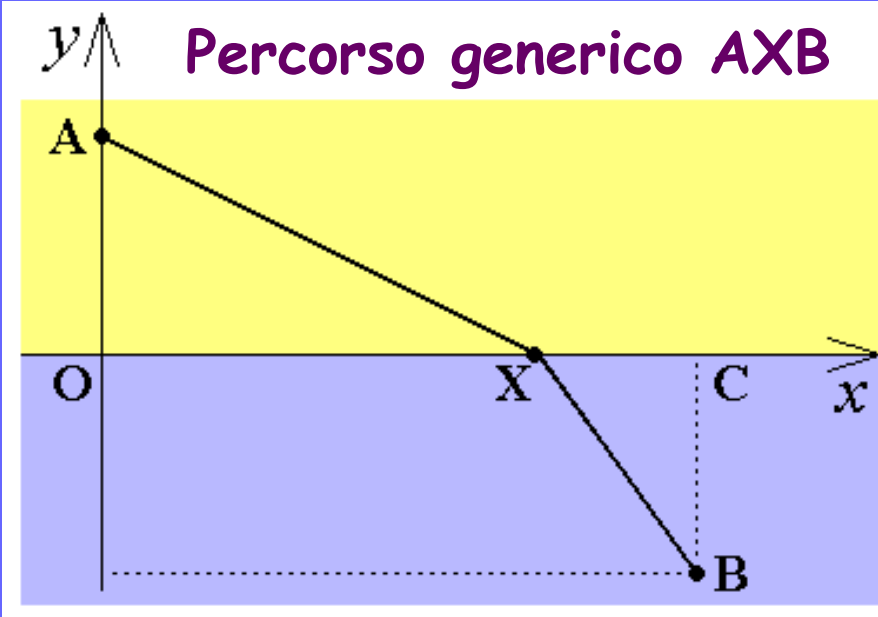
Percorso AMB



Percorso ACB



Percorso generico AXB



Se si sceglie di attraversare l'asse nel punto X , il tempo impiegato sarà $T(X)$

$X \longrightarrow T(X)$

Il problema del bagnino

1

completare

DATI

$A=(0;6)$

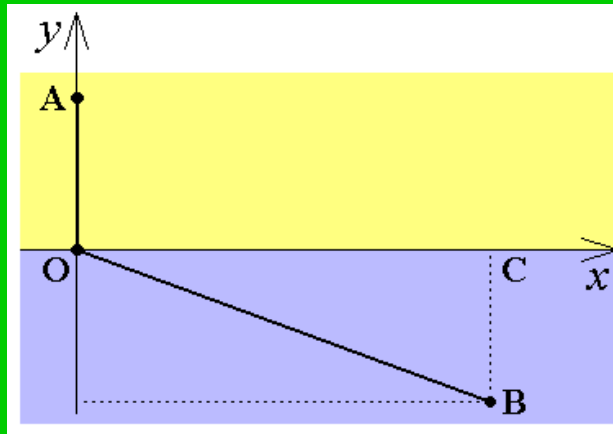
$B=(15;-6)$

Velocità nell'area gialla = 1

Velocità nell'area celeste = $1/2$

Tre possibili scelte

Percorso AOB

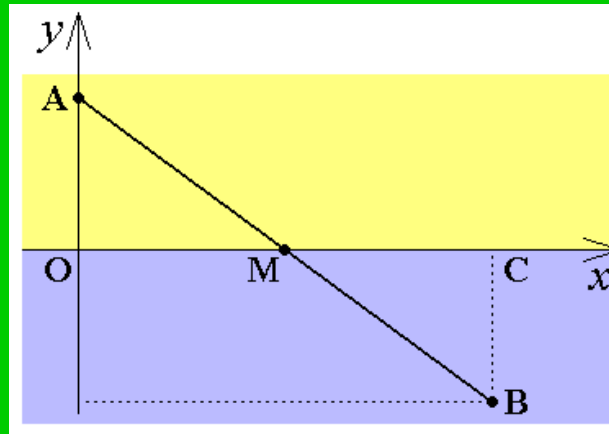


- $AO = 6$
- $OB = \sqrt{OC^2 + CB^2} = \sqrt{15^2 + 6^2} = 3\sqrt{29}$
- Tempo = Spazio/Velocità

$$T(O) = \frac{AO}{1} + \frac{OB}{1/2}$$

$$T(O) = 6 + 6\sqrt{29} \simeq 38.3$$

Percorso AMB

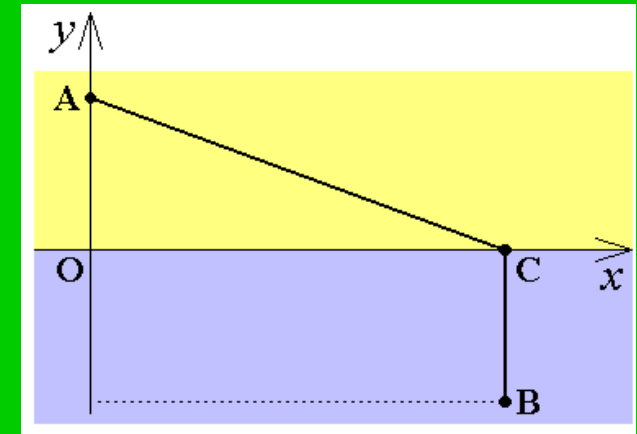


$AM = \dots\dots\dots$

$MB = \dots\dots\dots$

$T(M) = \dots\dots\dots$

Percorso ACB



$AC = \dots\dots\dots$

$CB = \dots\dots\dots$

$T(C) = \dots\dots\dots$

Il problema del bagnino

1

risultati

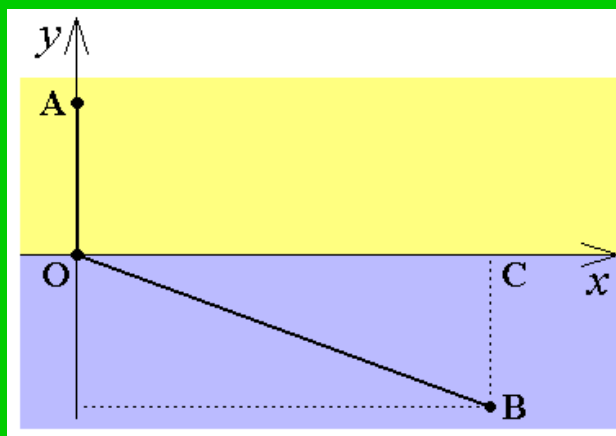
DATI

A=(0;6)
B=(15;-6)

Velocità nell'area gialla = 1
Velocità nell'area celeste = 1/2

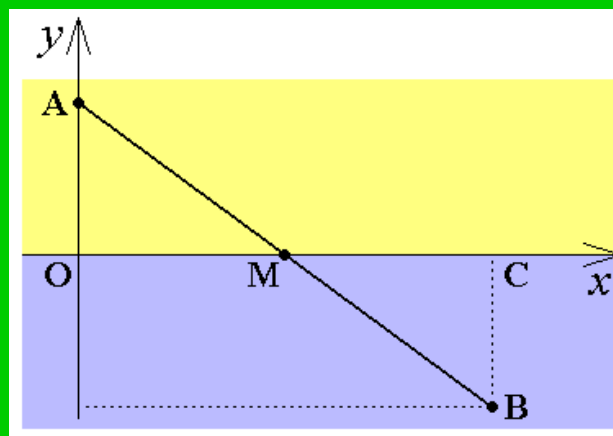
Tre possibili scelte

Percorso AOB



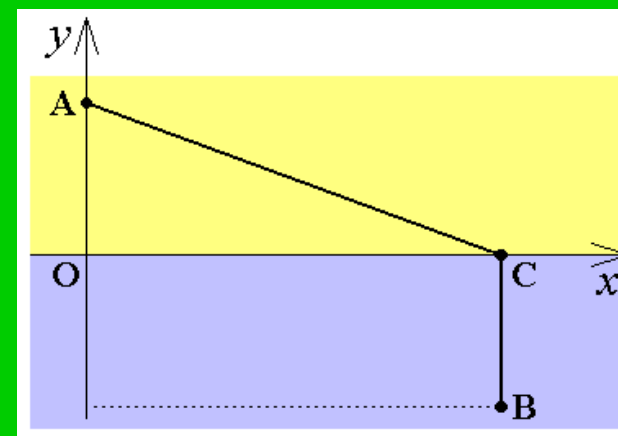
- $AO = 6$
- $OB = \sqrt{OC^2 + CB^2} = \sqrt{15^2 + 6^2} = 3\sqrt{29}$
- Tempo = Spazio/Velocità
 $T(O) = \frac{AO}{1} + \frac{OB}{1/2}$
 $T(O) = 6 + 6\sqrt{29} \simeq 38.3$

Percorso AMB



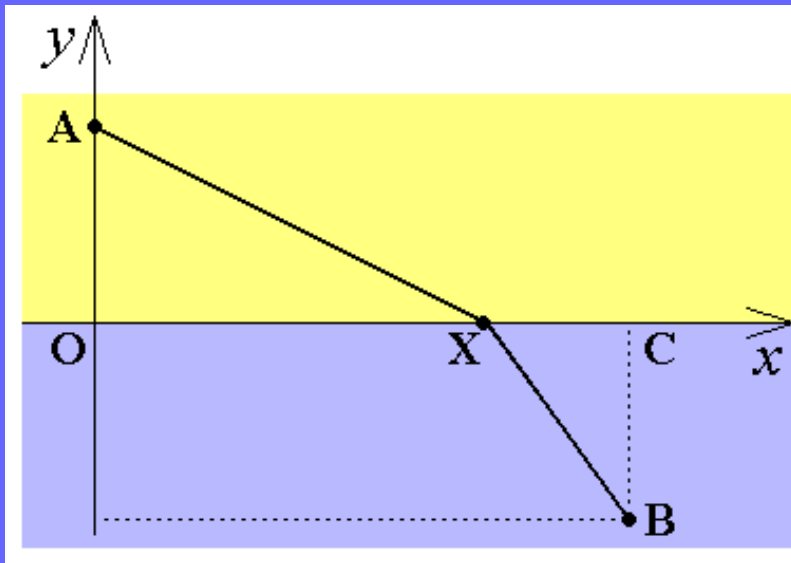
- $AM = \sqrt{AO^2 + OM^2} = \sqrt{6^2 + (15/2)^2} = 3/2 \cdot \sqrt{41}$
- $MB = AM = 3/2 \cdot \sqrt{41}$
- Tempo = Spazio/Velocità
 $T(M) = \frac{AM}{1} + \frac{MB}{1/2} = 9/2 \cdot \sqrt{41} \simeq 28.8$

Percorso ACB



- $AC = \sqrt{AO^2 + OC^2} = \sqrt{6^2 + 15^2} = 3\sqrt{29}$
- $CB = 6$
- Tempo = Spazio/Velocità
 $T(C) = \frac{AC}{1} + \frac{CB}{1/2} = 3\sqrt{29} + 12 \simeq 28.2$

Il problema del bagnino

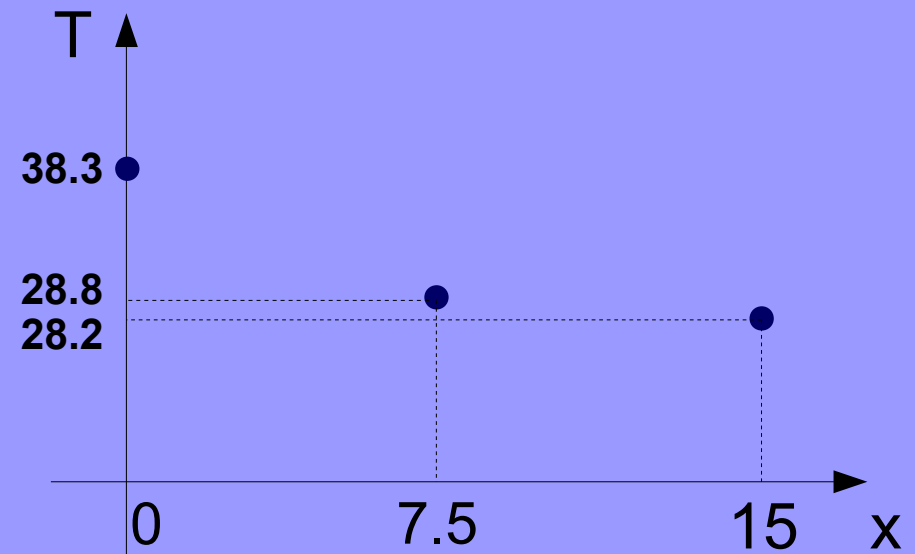


Ad ogni valore di x viene associato il corrispondente valore $T(x)$

$x \longrightarrow T(x)$

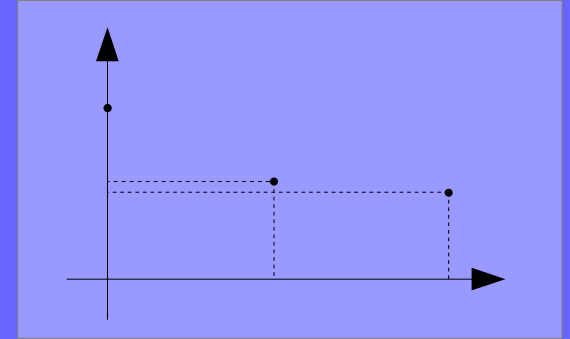
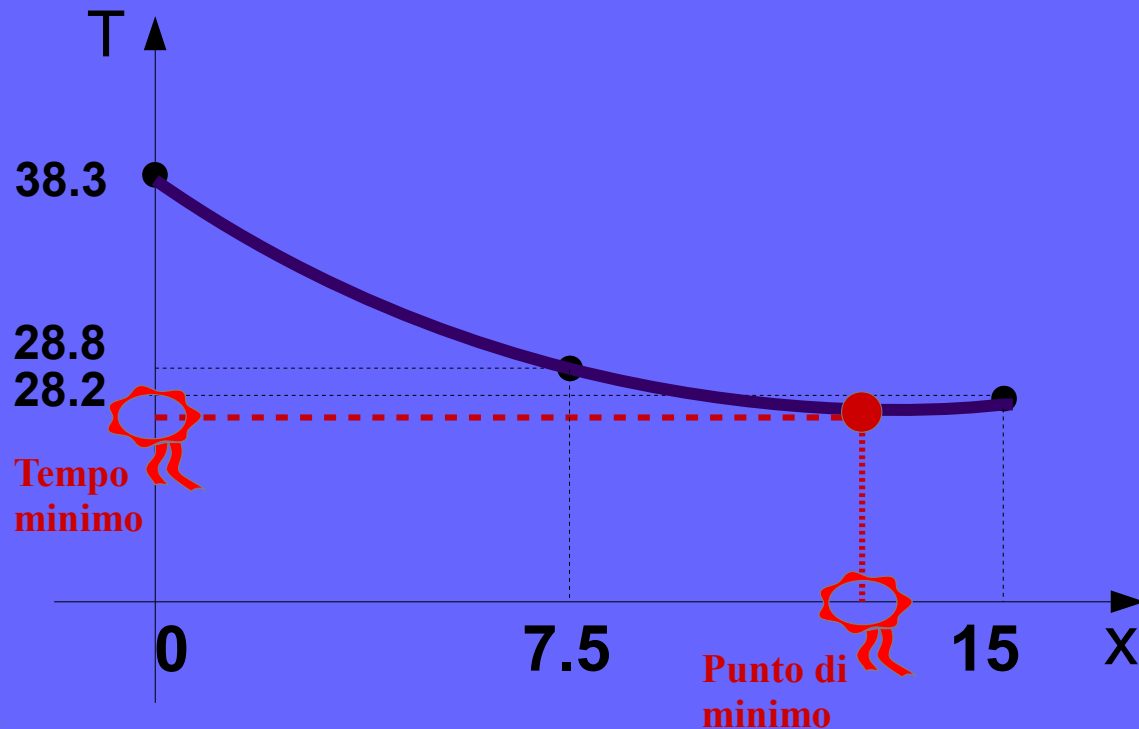
0 $\longrightarrow$ 38.3
7.5 $\longrightarrow$ 28.8
15 $\longrightarrow$ 28.2

I punti $(x; T(x))$ vengono rappresentati nel piano cartesiano



rappresentazione dei punti
 $(0 ; 38.3)$, $(7.5 ; 28.8)$, $(15 ; 28.2)$

Il problema del bagnino



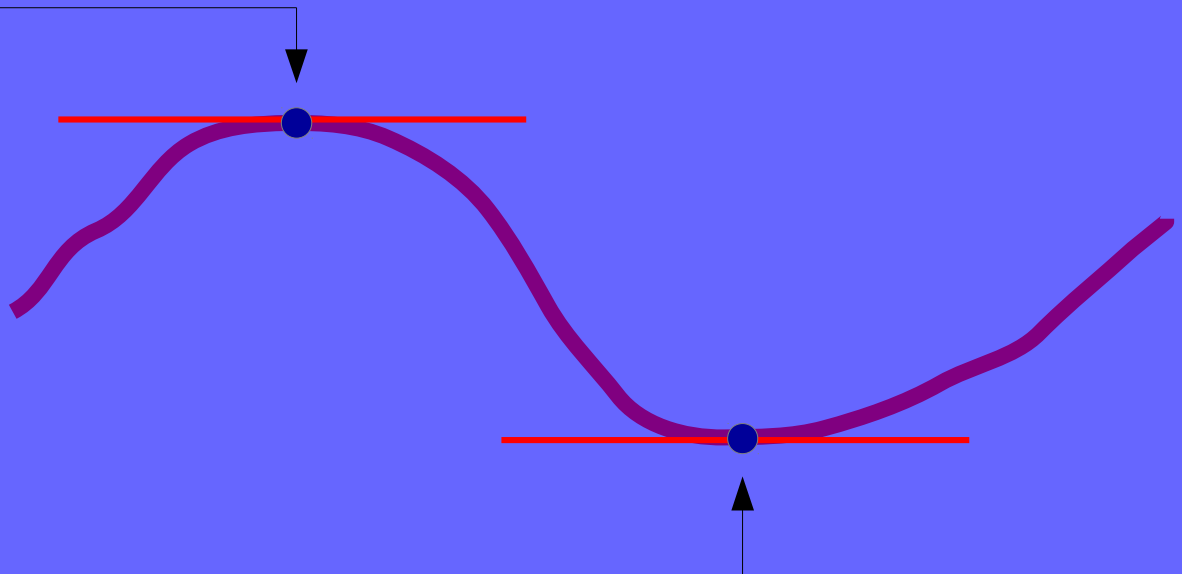
Se si prendono in considerazione tutti i valori di x compresi fra 0 e 15, si ottengono infiniti punti, che formano una curva

Il problema è calcolare il punto più basso della curva, cioè quello che corrisponde al tempo di percorrenza minimo

PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALE

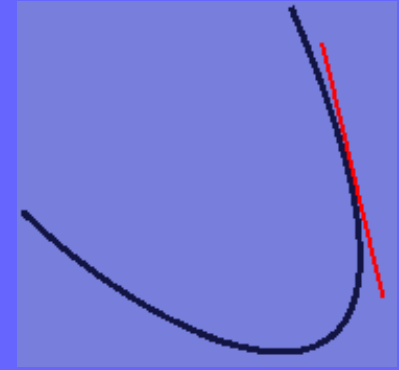
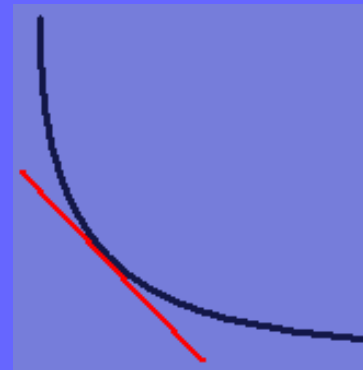
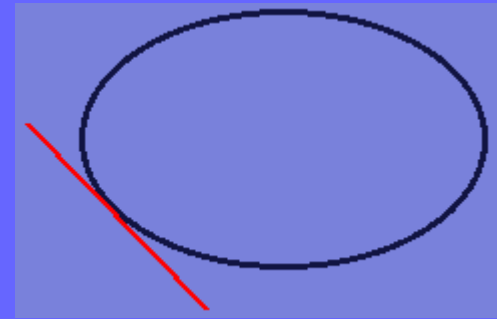
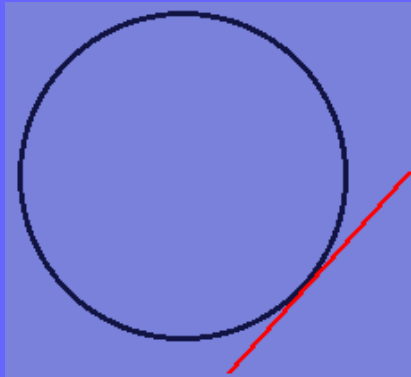
Fra tutti i punti interni di una curva, *quelli situati più in alto o più in basso rispetto ai punti vicini* hanno una caratteristica importante:

la retta tangente
è disposta
orizzontalmente



IL PROBLEMA DELLA RETTA TANGENTE

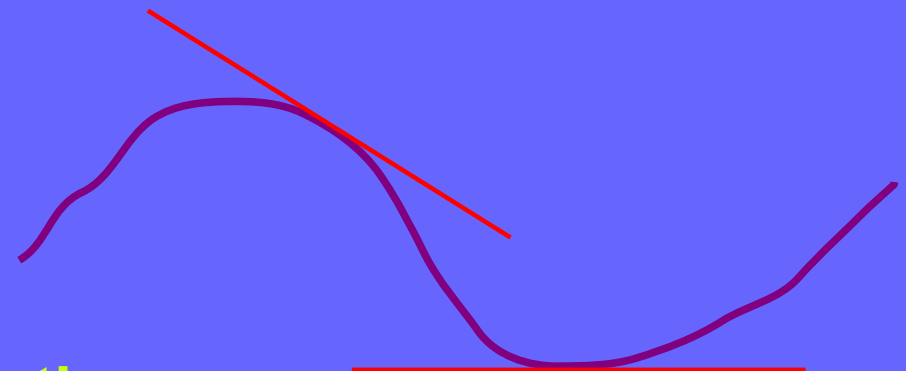
Il calcolo della
retta tangente
è semplice solo
in casi particolari



Nel caso generale il calcolo
è complesso, e richiede una
operazione detta

derivazione

che è propria dell'**Analisi Matematica**
e che in genere si studia al quinto anno



Il problema del bagnino

In mancanza della derivazione, come possiamo risolvere il problema del bagnino?

Fortunatamente ancora una volta ci viene in soccorso la natura, che suggerisce un'altra strada per la risoluzione del problema

Anche la luce sceglie sempre il tragitto che minimizza il tempo

RIFRAZIONE
DELLA LUCE

Legge di Snell

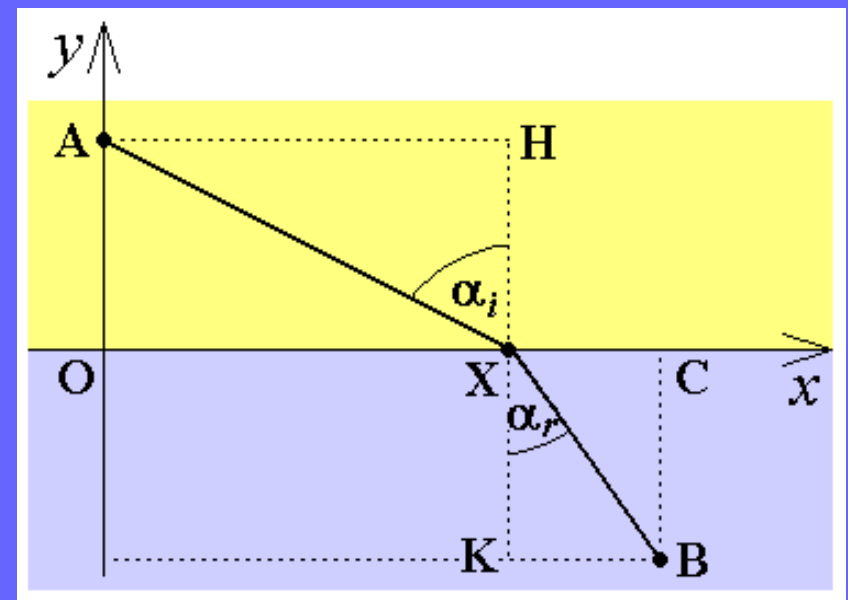
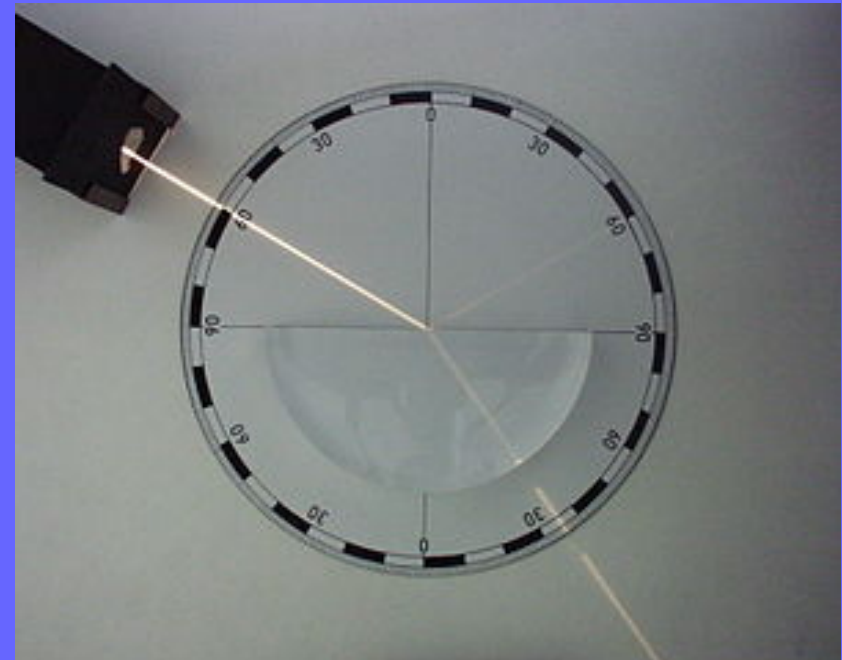
$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_r} = \frac{v_i}{v_r}$$

v_i = velocità del raggio incidente

v_r = velocità del raggio rifratto

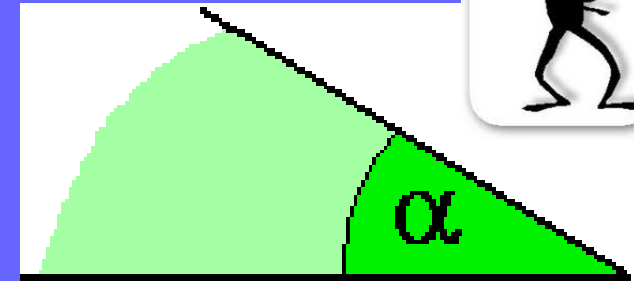
α_i = angolo del raggio incidente

α_r = angolo del raggio rifratto



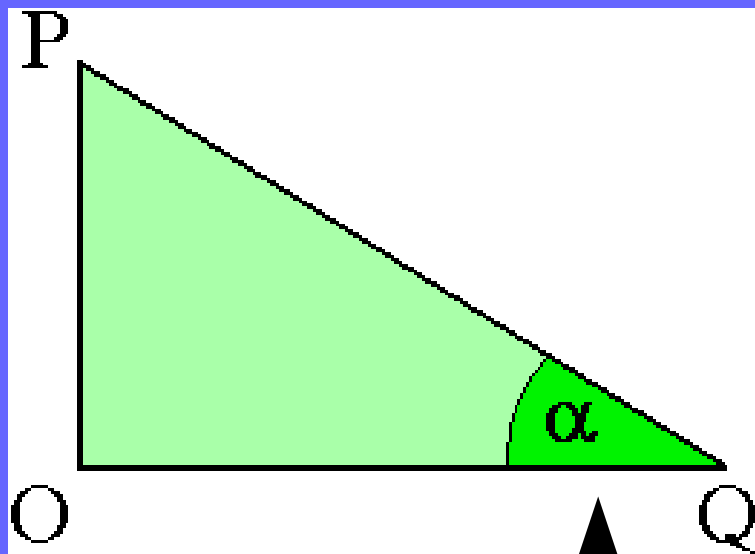
Il seno di un angolo

Un modo elementare per definire il seno di un angolo acuto



Dato l'angolo acuto α , si disegna un triangolo rettangolo che lo abbia come uno dei suoi angoli e si considera il rapporto fra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa

sen α = ?

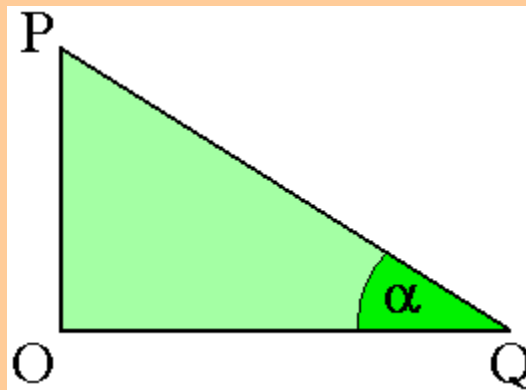


$$\text{sen } \alpha = \frac{OP}{PQ}$$

Il problema del bagnino

2

**DEFINIZIONE DI
SENO DI UN ANGOLO**



$$\text{sen } \alpha = \frac{OP}{PQ}$$

completare

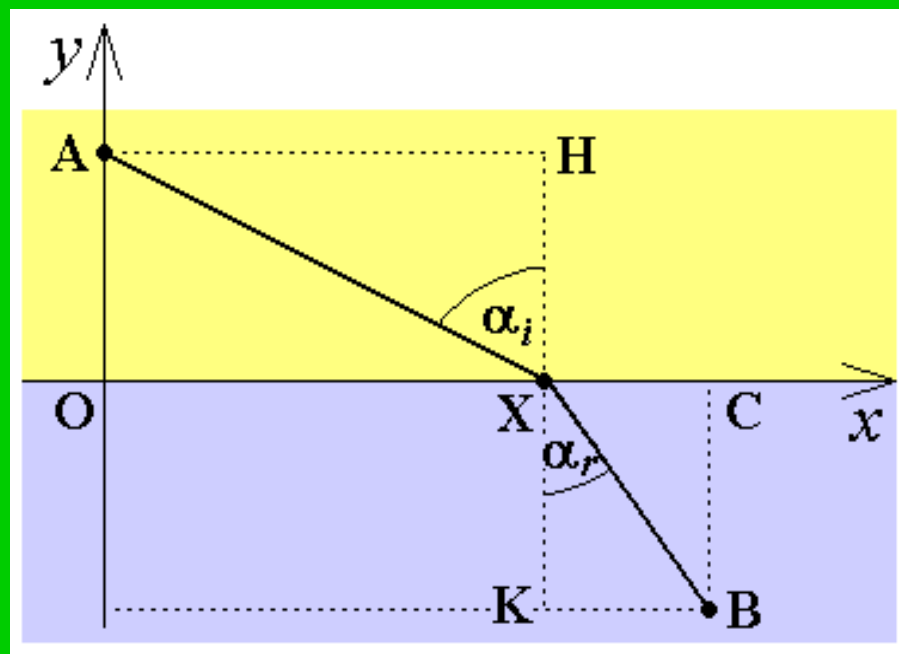
DATI

$$A=(0; 6) \quad B=(15;-6)$$

$$X=(x;0)$$

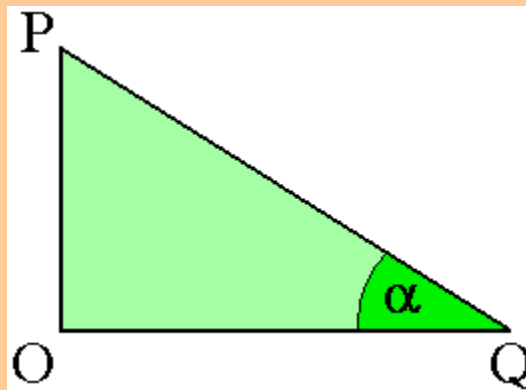
$$\text{sen } \alpha_i = \frac{AH}{AX} = \dots\dots\dots$$

$$\text{sen } \alpha_r = \dots = \dots\dots\dots$$



Il problema del bagnino

**DEFINIZIONE DI
SENO DI UN ANGOLO**



$$\text{sen } \alpha = \frac{OP}{PQ}$$

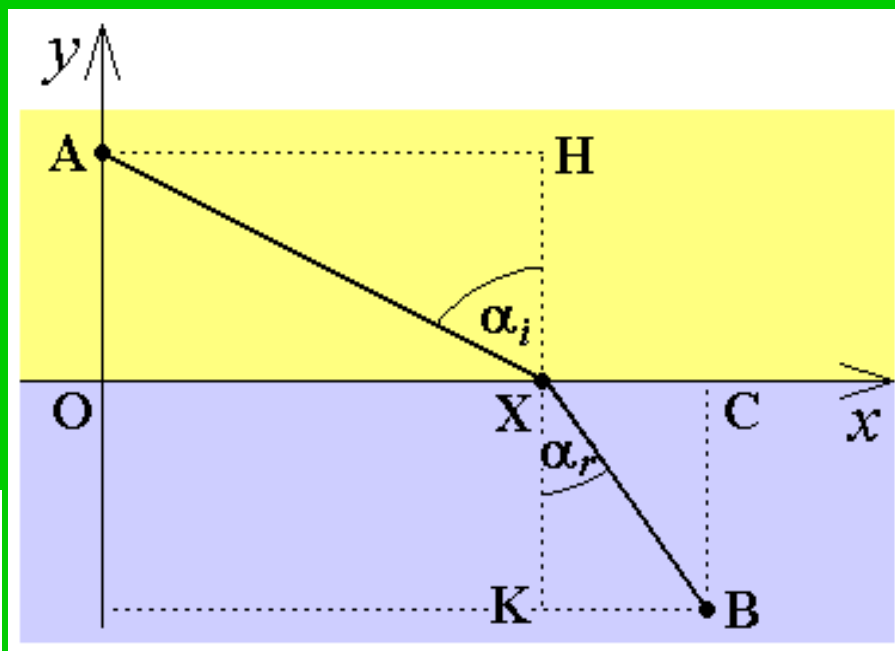
DATI

$$A=(0; 6) \quad B=(15;-6)$$

$$X=(x;0)$$

$$\text{sen } \alpha_i = \frac{AH}{AX} = \frac{x}{\sqrt{x^2+36}}$$

$$\text{sen } \alpha_r = \frac{KB}{BX} = \frac{15-x}{\sqrt{(15-x)^2+36}}$$



Il problema del bagnino

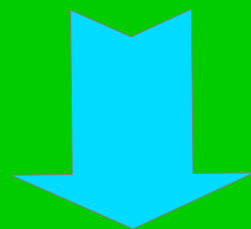
3

DATI	$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen } \alpha_i = \frac{x}{\sqrt{x^2+36}} \\ \text{sen } \alpha_r = \frac{15-x}{\sqrt{(15-x)^2+36}} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V_i = 1} \\ \mathbf{V_r = 1/2} \end{array} \right.$
-------------	---	---

Ora imponiamo che
valga l'uguaglianza

$$\frac{\text{sen } \alpha_i}{\text{sen } \alpha_r} = \frac{\mathbf{V_i}}{\mathbf{V_r}}$$

completare



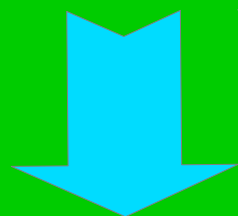
e così otteniamo la seguente equazione irrazionale fratta

.....

Il problema del bagnino

Ora imponiamo che valga l'uguaglianza

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_r} = \frac{V_i}{V_r}$$



e così otteniamo la seguente equazione irrazionale fratta

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+36}}}{\frac{15-x}{\sqrt{(15-x)^2+36}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

DATI	$\begin{cases} \sin \alpha_i = \frac{x}{\sqrt{x^2+36}} \\ \sin \alpha_r = \frac{15-x}{\sqrt{(15-x)^2+36}} \end{cases}$	$\begin{cases} V_i = 1 \\ V_r = 1/2 \end{cases}$
------	--	--

che possiamo riscrivere nella forma

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+36}} = 2 \frac{15-x}{\sqrt{(15-x)^2+36}}$$

Il problema del bagnino

Partendo dall'equazione

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+36}} = 2 \frac{15-x}{\sqrt{(15-x)^2+36}}$$

completare

eliminiamo i denominatori e le radici, così da ottenere l'equazione algebrica razionale intera

.....

Partendo dall'equazione

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+36}} = 2 \frac{15-x}{\sqrt{(15-x)^2+36}}$$

eliminiamo i denominatori e le radici, così da ottenere l'equazione algebrica razionale intera

$$x^4 - 30x^3 + 261x^2 - 1440x + 10800 = 0$$

che ora ci proponiamo di risolvere



Il problema del bagnino

completare

**Scomponi in
fattori primi il
numero 10800**

10800	$2^2 \times 5^2$
-----	-----
-----	-----
-----	-----

10800 =

Scrivi i primi dieci divisori del numero 10800

1 - 2 - 3 -

Quanti sono i divisori del numero 10800 ?

Suggerimento: il generico divisore del numero 10800 ha la forma

$$2^m \times 3^n \times 5^p$$

dove

l'esponente m varia da 0 a 4 inclusi, sicché assume 5 valori;

l'esponente n varia da ... a ... inclusi, sicché assume ... valori;

l'esponente p varia da ... a ... inclusi, sicché assume ... valori.

Il numero dei divisori è

.....

Il problema del bagnino

5

risultati

**Scomponi in
fattori primi il
numero 10800**

$$\begin{array}{r|l} 10800 & 2^2 \times 5^2 \\ 108 & 2^2 \\ 27 & 3^3 \\ 1 & \end{array}$$

$$10800 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$$

Scrivi i primi dieci divisori del numero 10800

1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 8 - 9 - 10 - 12

Quanti sono i divisori del numero 10800 ?

Suggerimento: il generico divisore del numero 10800 ha la forma

$$2^m \times 3^n \times 5^p$$

dove

l'esponente m varia da 0 a 4 inclusi, sicché assume 5 valori;

l'esponente n varia da 0 a 3 inclusi, sicché assume 4 valori;

l'esponente p varia da 0 a 2 inclusi, sicché assume 3 valori.

Il numero dei divisori è

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

A proposito di numeri primi

domande

“ Dei seguenti numeri
1 - 1601 - 54321 - 52349 - 54329 - 54923
uno solo è primo ”

Vero o Falso ?

“Qualunque sia il valore di n , il numero
 $n^2 - n + 41$ è primo”

Vero o Falso ?

“ Ogni numero pari maggiore di 2 è esprimibile come
somma di due numeri primi (uguali o distinti) ”

Vero o Falso ?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tavola dei numeri primi
compresi fra 1 e 100

A proposito di numeri primi

“ Dei seguenti numeri

1 - 1601 - 54321 - 52349 - 54329 - 54923
uno solo è primo ”

VERO! 1601 è primo (basta provare a dividerlo per i numeri primi fino a 37):
1 non è primo per definizione; 54321 si divide per 3; gli altri per 11

“Qualunque sia il valore di n , il numero
 $n^2 - n + 41$ è primo”

FALSO! Se $n = 41$ si ottiene 41^2 , che non è primo

“ Ogni numero pari maggiore di 2 è esprimibile come
somma di due numeri primi (uguali o distinti) ”

**PROBLEMA
IRRISOLTO !**

Nel 1742, il matematico prussiano Christian Goldbach scrisse una lettera a Eulero in cui propose la seguente congettura:

Ogni intero maggiore di 5 può essere scritto come somma di tre numeri primi.

Eulero rispose riformulando il problema nella seguente versione equivalente:

Ogni numero pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi.

Nell'aprile del 2012 la verifica, effettuata con potenti calcolatori, ha raggiunto il numero 4×10^{18} .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tavola dei numeri primi
compresi fra 1 e 100



Il numero primo più grande

CorriereDellaSera.it

22 gennaio 2016

581887266232246442175100212113232368636370852325421589
325781704480584492761707442316428281349423376942979071
335489886655517752224731316967316601101080371457923021
83843691749219733394648729851218665756323673512565202
96409743780369625054208874496827334461785838402213192
0787583935917496283612402707082209797985800006635414
921583881775901175855244421937156984065294070824916668
4333362872906548034934506486437078186082364801574803
5974521970750717373497738481452373118436820056427064...

La comunità scientifica brinda a una nuova scoperta: è stato trovato un nuovo numero primo. E non uno qualsiasi, ma un numero primo di Mersenne. Questa particolarissima classe di numeri primi, ossia quelli della forma $2^n - 1$, fu scoperta dal monaco francese Marin Mersenne nel XVII secolo. Il numero scoperto è **$2^{74.207.281} - 1$** ; a trovarlo è stato il professor Curtis Cooper della Università del Missouri, all'interno di un progetto avviato più di vent'anni fa, che utilizza migliaia di computer funzionanti in contemporanea, messi a disposizione da volontari sparsi in tutto il mondo. Il numero è composto da 22 milioni di cifre, così lungo che a scriverlo con cifre di un centimetro di larghezza coprirebbe la distanza di 220 km.



La scoperta, oltre alla sua importanza teorica, ha anche un'implicazione pratica immediata: i numeri primi molto grandi vengono utilizzati nei sistemi di crittografia digitale asimmetrica per la protezione dei dati in ambito informatico. Non a caso l'Electronic Frontier Foundation, organizzazione che difende i diritti digitali degli utenti, ha messo in palio 150 mila dollari per chi troverà un numero primo da cento milioni di cifre. Sarebbe uno strumento pressoché infallibile per garantire la privacy delle comunicazioni criptate.

Il problema del bagnino

7

Risolviamo l'equazione

$$x^4 - 30x^3 + 261x^2 - 1440x + 10800 = 0$$

completare

**Usando la regola del resto, si scopre
che una radice dell'equazione è**

$$x = \dots$$

Regola del resto

Il resto della divisione del polinomio $p(x)$ per il binomio $x - a$ è uguale a $p(a)$

Radici razionali (caso coefficienti interi)

Se il numero razionale p/q , con p e q primi fra loro, è radice del polinomio $p(x)$, allora p è divisore del termine noto e q è divisore del coefficiente direttore.

In particolare, se il polinomio è monico, le eventuali radici razionali sono numeri interi e sono divisori del termine noto

Risolviamo l'equazione

$$x^4 - 30x^3 + 261x^2 - 1440x + 10800 = 0$$

Regola del resto

Il resto della divisione del polinomio $p(x)$ per il binomio $x - a$ è uguale a $p(a)$

Radici razionali (caso coefficienti interi)

Se il numero razionale p/q , con p e q primi fra loro, è radice del polinomio $p(x)$, allora p è divisore del termine noto e q è divisore del coefficiente direttore.

In particolare, se il polinomio è monico, le eventuali radici razionali sono numeri interi e sono divisori del termine noto

Usando la regola del resto, si scopre
che una radice dell'equazione è

$$x = 12$$

Il problema del bagnino

completare

Ora bisogna effettuare la divisione

$$x^4 - 30x^3 + 261x^2 - 1440x + 10800$$

A tale scopo, usando la regola di Ruffini, otteniamo

	1		261		10800
.....			540		
		-18			

Ne segue che

$$x^4 - 30x^3 + 261x^2 - 1440x + 10800 = (x - \text{.....}) (x^3 - \text{.....} - 900)$$

Dire se il polonomio di terzo
grado ammette radici razionali

Sì

barrare la
risposta
esatta

No

Il problema del bagnino

Ora bisogna effettuare la divisione

$$x^4 - 30x^3 + 261x^2 - 1440x + 10800 \quad \bigg| \quad x - 12$$

A tale scopo, usando la regola di Ruffini, otteniamo

	1	-30	261	-1440	10800
12		12	-216	540	-10800
	1	-18	45	-900	0

Ne segue che

$$x^4 - 30x^3 + 261x^2 - 1440x + 10800 = (x - 12)(x^3 - 18x^2 + 45x - 900)$$

Dire se il polonomio di terzo
grado ammette radici razionali

Sì

barrare la
risposta
esatta

No

Il problema del bagnino

Le eventuali altre soluzioni dell'equazione di 4° grado si ottengono risolvendo l'equazione di 3° grado

$$x^3 - 18x^2 + 45x - 900 = 0$$



della quale però si è detto che non ammette radici razionali. Né si vedono semplici espedienti o artifici di tipo algebrico con cui sia possibile determinare eventuali soluzioni non razionali.

Comunque si può dimostrare, con metodi propri dell'Analisi Matematica, che il nostro polinomio di terzo grado ammette un'unica radice reale (non razionale), e che essa si trova fuori dall'intervallo di interesse ([0,15])

Equazioni di terzo grado

Anche per l'equazione di 3° grado esiste una formula risolutiva, nota col nome di *Formula di Cardano (1545)*.

Si parte dall'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Effettuando la sostituzione $x = y - \frac{b}{3a}$ si ottiene $y^3 + py + q = 0$

le cui soluzioni sono date dalla formula

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$



I problemi sorgevano, al tempo di Cardano, quando risultava negativa l'espressione contenuta nelle radici quadrate.

$$i := \sqrt{-1}$$

Questo caso, detto *irriducibile*, venne risolto nel 1572 da Rafael Bombelli, il quale trovò le regole di calcolo per le radici di numeri negativi, che egli chiamava *quantità silvestri* e che più tardi Cartesio chiamò *numeri complessi*.

Oggi i numeri complessi sono indispensabili in molti campi della fisica e dell'ingegneria, ad esempio nell'elettrotecnica, nell'elettronica e nella scienza delle telecomunicazioni.

Equazioni di terzo grado

Riprendiamo per un momento l'equazione

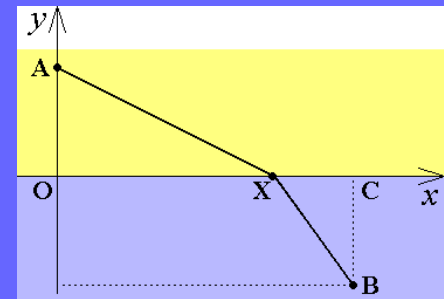
$$x^3 - 18x^2 + 45x - 900 = 0$$

Applicando ad essa la formula di Cardano, si trova l'unica radice reale

$$x = 6 + \sqrt[3]{30\sqrt{303} + 531} + \sqrt[3]{30\sqrt{303} - 531}$$

cioè, approssimativamente

$$x \simeq 18.2$$



che, come già si era osservato, non è compresa fra 0 e 15

Un po' di storia sulle equazioni algebriche

La formula risolutiva dell'**equazione di 3° grado** viene pubblicata nel 1545 da **Girolamo Cardano** nel suo libro intitolato *l'Ars Magna*.

L'autore ne attribuisce onestamente il merito a Niccolò Fontana, meglio noto come Tartaglia, al quale però aveva promesso che non l'avrebbe divulgata. Del resto è molto probabile che lo stesso Tartaglia abbia dedotto l'idea da qualche fonte anteriore, forse da Scipione Dal Ferro.



Dal Ferro



Tartaglia



Cardano

Sullo stesso testo Cardano pubblica anche la formula risolutiva della **equazione di 4° grado**.

Anche per questa Cardano ammette di non essere lui lo scopritore, attribuendone il merito a Luigi Ludovico Ferrari, che era stato per un certo periodo suo assistente.

Un po' di storia sulle equazioni algebriche

Paolo Ruffini nel 1803 e poi Niels Henrik Abel nel 1824 dimostrano che invece **le equazioni di grado maggiore di 4 non sono risolubili per radicali.**

Qualche anno dopo Évariste Galois ritrova tutti i precedenti risultati e li generalizza stabilendo una **condizione necessaria e sufficiente affinché una equazione sia risolubile per radicali**

Risolubilità per radicali
esempio

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Ruffini



Abel



Galois

Vite di matematici

Da Wikipedia



Niccolò Fontana (Brescia, 1499-1557)

Nacque da una famiglia poverissima. A 12 anni, durante la presa di Brescia da parte dei francesi, fu ferito alla mandibola e al palato. Sopravvisse, ma gli rimase una evidente difficoltà ad articolare le parole. Per questo ebbe il soprannome "Tartaglia". Non poté frequentare alcuna scuola; nei suoi scritti, si vanta di essere autodidatta e di essere andato a scuola di scrittura solo per 15 giorni.



Niels Henrik Abel (Norvegia, 1802-1829)

La sua vita fu angustata dalla povertà. A ventitré anni il governo gli accordò i fondi per un viaggio scientifico. A Parigi chiese al grande Cauchy di esaminare un suo manoscritto, ma Cauchy perse le carte. Morì per una tubercolosi a soli 26 anni. Due giorni dopo giunse a casa sua la lettera che gli annunciava la nomina come professore di Matematica all'Università di Berlino.



Évariste Galois (Francia, 1811-1832)

Da adolescente scoprì un metodo generale per stabilire la risolubilità delle equazioni algebriche. Fu bocciato due volte all'esame di ammissione alla École Polytechnique. Scagliò il cancellino contro l'esaminatore che gli chiedeva di giustificare passaggi per lui banali. Morì durante un duello alla pistola, combattuto per salvare l'onore di una donna. Aveva trascorso l'intera notte cercando di sistemare i suoi lavori matematici, e annotando spesso di non avere il tempo per un'esposizione più chiara e completa.

Il problema del bagnino

Abbiamo trovato che l'equazione di 4° grado ammette una sola radice compresa fra 0 e 15, data da

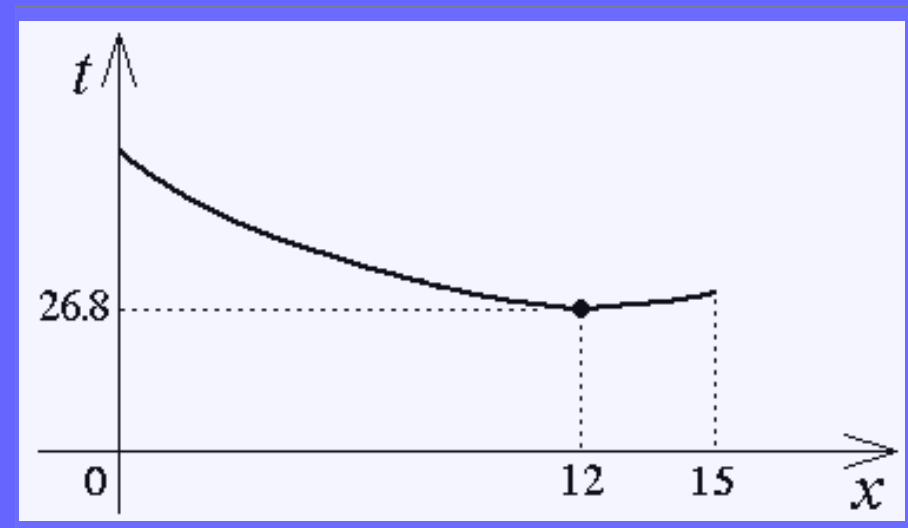
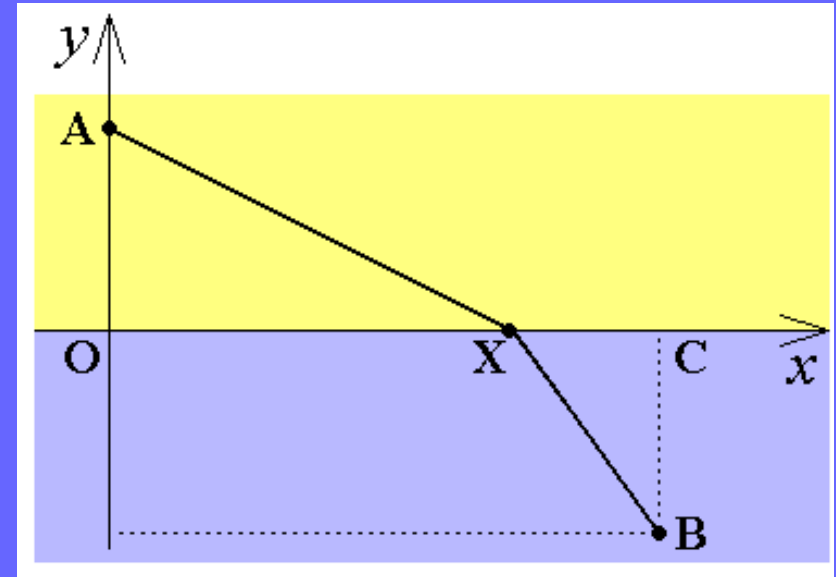
$$x = 12$$

Ad essa corrisponde il tempo di percorrenza minimo

$$T(12) = 12\sqrt{5} = 26.8$$

Gli altri tempi
calcolati erano

$$\begin{aligned} T(0) &= 38.3 \\ T(7.5) &= 28.8 \\ T(15) &= 28.2 \end{aligned}$$

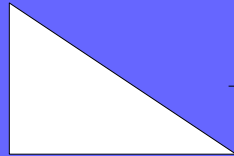




Il problema del bagnino

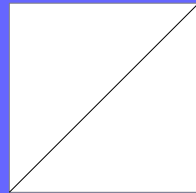
La matematica utilizzata nel problema

Teorema di Pitagora



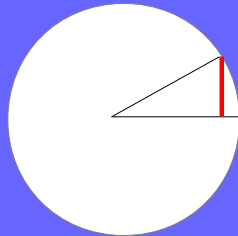
Pitagora, VI secolo a.C. Ma l'enunciato era già noto ai Babilonesi (II millennio a.C.).

Numeri irrazionali



VI secolo a.C. Ippaso di Metaponto, della scuola pitagorica, scopre che il lato e la diagonale del quadrato sono incommensurabili.

Seno di un angolo



Ipparco di Nicea (II a.C.), Tolomeo (II d.C.)
Il matematico indiano Aryabhata nel 499 d.C. introduce il termine sanscrito **jya** (corda). Questo in arabo viene letto **jiba** e scritto **jb**; i traduttori occidentali lo intendono **jaib** (baia) e Gherardo da Cremona lo traduce in latino **sinus**.

Calcolo algebrico

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

IX secolo. Il termine “algebra” deriva dalla parola araba **al-jabr**, contenuta nel titolo di un libro del matematico persiano Al-Khuwarizmi; Il titolo è “Compendio sul Calcolo per Completamento e Bilanciamento”, e al-jabr è la tecnica di aggiustamento usata per risolvere le equazioni di 2° grado. Dal nome dell'autore deriva il termine “algoritmo”.

Il problema del bagnino

La matematica utilizzata nel problema

Equazioni algebriche



XVI secolo, XIX secolo

Rappresentazione di punti e curve nel piano cartesiano



Cartesio, prima metà del XVII secolo

Legge di Snell



XVII secolo

Concetto di funzione



Termine introdotto da Leibniz nel 1694

Problema della tangente e necessità della derivazione



Newton e Leibniz, fine del XVII secolo

Regola del resto e algoritmo di Ruffini



XIX secolo

Uso della numerazione posizionale



VI e VIII secolo, India e Medio Oriente.
Introduzione in Europa nel XIII secolo ad opera di Leonardo Pisano.

Verso la conclusione

Con l'augurio che, quando sarete diventati avvocati, medici, architetti, commercialisti ecc., della matematica non abbiate soltanto un'idea così

$$97. \sqrt[4]{\frac{x^6}{x^2 - 4x + 4}} ; \sqrt[3]{(4x^2 + 4x + 1)(2x + 1)}.$$

$$98. \sqrt[4]{\frac{81(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 - y^2)^2}{x^2 - 2xy + y^2}} ; \sqrt[15]{\frac{a^{10}b^{15}}{(x-1)^{10}}}.$$

$$99. \sqrt[12]{\frac{(a^2 - 2a + 1)^3}{(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)^2}} ; \sqrt[4]{\frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{a^2 + 2ab + b^2}}.$$

$$100. \sqrt[6]{\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{a^{12}b^6}} ; \sqrt[14]{\frac{(a+b)^7}{x^{21}y^{49}}}.$$

$$101. \sqrt[4]{4a^2x^2 - 8ax^2 + 4x^2} ; \sqrt[3]{a^3b + 2a^2b^2 + ab^3}.$$

$$102. \sqrt[4]{\frac{(a^6 - 1)(a^3 + 1)}{(a-1)(a^2 + a + 1)}} ; \sqrt[6]{\frac{x^2}{y^2} + 2 + \frac{y^2}{x^2}}.$$

$$103. \sqrt[8]{\frac{b}{(a+b)(a^2 + ab + b^2)} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right)}.$$

$$104. \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2} + \frac{1+2a}{b^2}} ; \sqrt[6]{\frac{(a^6 - b^6)(a^3 + b^3)}{a^3 - b^3}}.$$

$$105. \sqrt[6]{\frac{x^3y^2 + 3x^2y^3 + 3xy^4 + y^5}{64x^3y^5}} ; \sqrt[12]{\frac{81(a^2 + 2ab + b^2)^2}{(y^2 - 2y + 1)^6}}.$$

$$106. \sqrt[6]{\frac{8a^5}{a^2x^3 - 6a^2x^2 + 12a^2x - 8a^2}} ; \sqrt[4]{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}}.$$

$$107. \sqrt[4]{\frac{(9x^2 + 6x + 1)^3}{(9x^2 - 1)^2}} ; \sqrt[4]{\frac{a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6}{(a+b)(a-b)}}.$$

$$108. \sqrt[4]{1 + \frac{a}{b^2}} ; \sqrt[10]{\frac{(a+y)(a^4 - 2a^2y^2 + y^4)^2}{(a^3 - 3a^2y + 3ay^2 - y^3)^3}}.$$

$$109. \sqrt[8]{\frac{(x^6 - y^6)(x^3 - y^3)}{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}} ; \sqrt[8]{\frac{(a^2 - b^2)^4}{9(a^2 + 2ab + b^2)}}.$$

$$110. \sqrt[4]{\frac{25(8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3)}{2x^5y^2 - 3x^4y^3}}.$$

$$111. \sqrt[12]{a^3x^8y^4(x-y)^4} ; \sqrt[36]{a^6b^{12}x^{18}(x^2 - 2ax + a^2)^3}.$$

$$112. \sqrt[9]{\frac{(a^2 - 4b^2)^3}{a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3}} ; \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2} + 1 + \frac{b^2}{4a^2}}.$$

$$113. \sqrt[8]{(x+2) \frac{x^2(x+6) + 4(3x+2)}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}}.$$

$$114. \sqrt[4]{\frac{144(y^2 - 2by + b^2)^2(y^4 - 2b^2y^2 + b^4)^2}{9[(y-b)^4]^2}}.$$

$$115. \sqrt[6]{\frac{x^6 - x^2y^4 + x^4y^2 - y^6}{(x-y)(x+y)}} ; \sqrt[6]{1 - \frac{1}{a^3}}.$$

$$116. \sqrt[4]{\frac{a^6}{4a^2 - 4a + 1}} ; \sqrt[4]{\frac{(x^6 - y^6)}{(x-y)^2}}.$$

$$117. \sqrt[4]{\frac{(a^2 - b^2)^2(a+b)^2}{a^4b^6(a^2 + 2ab + b^2)}} ; \sqrt[12]{\frac{1}{x} \left(3 + \frac{1}{x}\right)}.$$

$$118. \sqrt[10]{\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}} ; \sqrt[10]{\frac{(x^2 - 2x + 1)^5}{(x-1)^5}}.$$

$$119. \sqrt[4]{\frac{0,25[x^3 - 9xy(x-3y) - 27y^3]}{x^3 - 9xy^2 + 3x^2y - 27y^3}}.$$

$$120. \sqrt[4]{\frac{a-6}{9ab^2} + \frac{b-6}{9a^2b} + \frac{9+2ab}{9a^2b^2}}.$$

$$121. \sqrt[6]{(a+1)(a^2-1)(a^3-1)(a^2+a+1)}.$$

$$122. \sqrt[9]{\frac{a^8b - 3a^6b + 3a^4b - a^2b}{a^8b^4 + 3a^7b^4 + 3a^6b^4 + a^5b^4}}.$$

$$123. \sqrt[8]{(a-b)(b-a)(x-y)(y-x)}.$$

$$124. \sqrt[3]{(a-1)(1-a)(x-2)(2-x)(ax-2a-x+2)}.$$

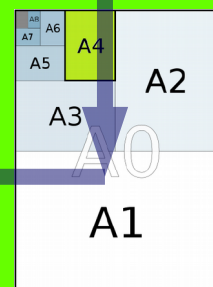
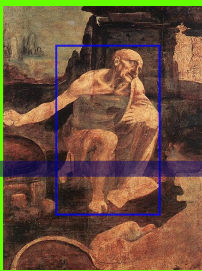
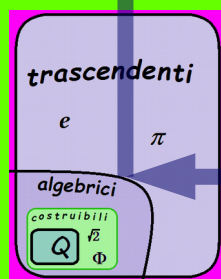
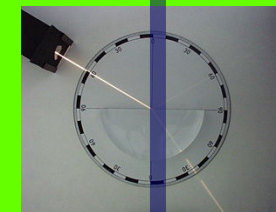
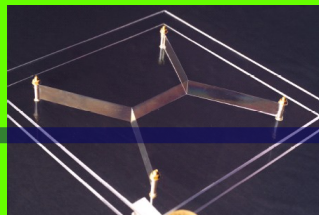
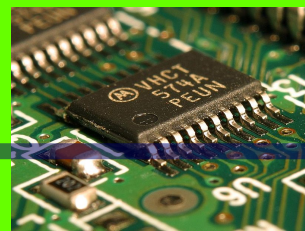
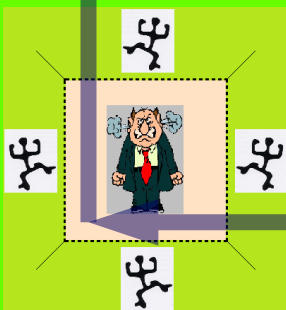
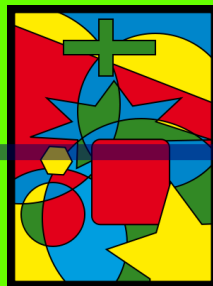
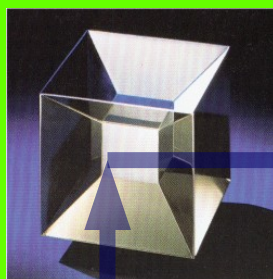
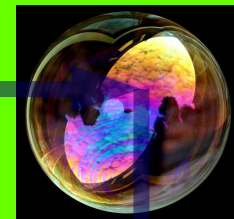
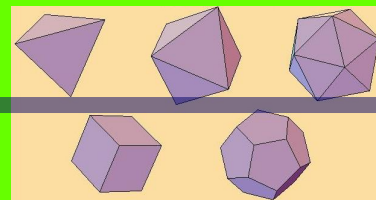
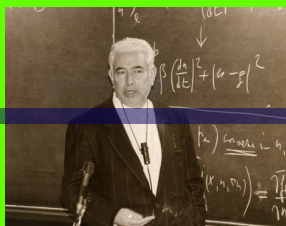
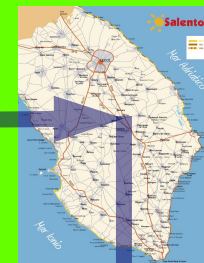
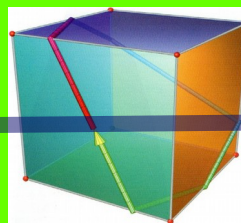
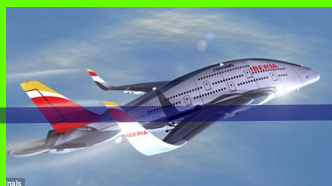
$$125. \sqrt{(x^2 - y^2)(x+y)(x^3 - y^3)(x^2 + xy + y^2)}.$$

$$126. \sqrt[4]{\frac{a^9b - 2a^7b^3 + a^5b^5}{a^3b - 2a^2b^2 + ab^3}}.$$

$$127. \sqrt[12]{\frac{4096(x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4)^3}{(x^6y^3 + 3x^5y^4 + 3x^4y^5 + x^3y^6)^2}}.$$



ma anche così



Progetto Lauree Scientifiche

OTTIMIZZAZIONE

Il problema del bagnino

- FINE -

Cosimo De Mitri

