Limite Universitario[1]

Studiare al variare del parametro reale a il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{ax}-(ax)^{ax}-x^{a}}{a^{x}-e^{x}}, \text{ con } a>0 \text{ e } a\neq e.$$

Soluzione

Osserviamo preliminarmente che per l'esistenza della funzione deve risultare x>0 perché x risulta base di un potenza ad esponente reale, dunque il limite è da intendersi per $x\to 0^{+}$, cioè

$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x^{ax}-(ax)^{ax}-x^{a}}{a^{x}-e^{x}}$$

Nella forma analitica della funzione compaiono al numeratore due termini che per $x\to 0^{+}$ si presentano nella forma indeterminata 0^{0}. Vogliamo provare che ciascuno tende ad uno.

Per il primo si ha

$$x^{ax}=e^{\log x^{ax}}=e^{ax\log x}$$

e poiché sussiste il limite notevole $\lim_{x\to 0^{+}} x\log x=0$ si deduce immediatamente che

$$\lim_{x\to 0^{+}} x^{ax}=\lim_{x\to 0^{+}} e^{ax\log x}=e^{a\cdot 0}=1 \qquad (*)$$

Per il secondo termine, $(ax)^{ax}$, posto $ax=t$, possiamo scrivere

$$\lim_{t\to 0^{+}} t^{t}=\lim_{t\to 0^{+}} e^{t\log t}=e^{0}=1 \qquad (**)$$

Dunque la differenza $x^{ax}-(ax)^{ax}$, per $x\to 0^{+}$, è infinitesima. Saremo interessati tra un attimo alla determinazione dell'ordine dell'infinitesimo.

Ancora, si ha evidentemente

$$\lim_{x\to 0^{+}} x^{a}=0, \qquad \lim_{x\to 0^{+}} a^{x}-e^{x}=1-1=0$$

Concludiamo che il limite in esame si presenta nella forma indeterminata 0/0. Per il suo studio notiamo che

$$a^{x}-e^{x}=a^{x}\left[1-\left(\frac{e}{a}\right)^{x}\right]=-a^{x}\cdot\frac{\left(\frac{e}{a}\right)^{x}-1}{x}\cdot x, \text{ per } x\neq 0,$$

e ricordando il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\log a$, con $a>0$, dall'essere $\lim_{x\to 0} a^{x}=1$, si deduce che la differenza $a^{x}-e^{x}$, per $x\to 0$, è un infinitesimo del primo ordine, precisamente è equivalente all'infinitesimo

$$\omega(x)=-1\cdot\log\left(\frac{e}{a}\right)\cdot x=-x\cdot\log\left(\frac{e}{a}\right)$$

Occupiamoci ora dell'ordine dell'infinitesimo $\varphi(x)=x^{ax}-(ax)^{ax}$

La funzione può essere scritta come segue

$$\varphi(x)=x^{ax}-(ax)^{ax}=x^{ax}-a^{ax}\cdot x^{ax}=-x^{ax}\left(a^{ax}-1\right)=-x^{ax}\cdot\frac{a^{ax}-1}{ax}\cdot ax.$$

Osservato ora che si ha anche

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{ax}-1}{ax}=\log a$$

[1] Prova d'esame di Analisi Matematica I/11-02-2006/ Ingegneria-Architettura-Bologna

e dunque, tenuto anche conto del limite (*), si deduce che per $x \to 0$ la funzione $\varphi(x)$ è un infinitesimo del primo ordine e risulta equivalente all'infinitesimo $-\log a \cdot (ax)$; infatti si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{ax} - (ax)^{ax}}{-\log a \cdot (ax)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^{ax} \cdot \dfrac{a^{ax}-1}{ax} \cdot \cancel{ax}}{-\log a \cdot (\cancel{ax})} = \frac{1}{\log a} \cdot \lim_{x\to 0} x^{ax} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{a^{ax}-1}{ax} = \frac{1}{\log a} \cdot 1 \cdot \log a = 1$$

A questo punto per lo studio del limite iniziale possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{ax} - (ax)^{ax} - x^a}{a^x - e^x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{ax} - (ax)^{ax}}{a^x - e^x} - \lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{a^x - e^x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\log a \cdot (ax)}{-x \cdot \log\left(\dfrac{e}{a}\right)} - \lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{-x \cdot \log\left(\dfrac{e}{a}\right)} =$$

$$\frac{a \log a}{\log\left(\dfrac{e}{a}\right)} + \frac{1}{\log\left(\dfrac{e}{a}\right)} \cdot \lim_{x\to 0^+} x^{a-1}$$

e sussistono i seguenti casi

1. con $a > 1$ e $a \neq e$, poiché $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{a-1} = 0$ il valore del limite è $\dfrac{a \log a}{\log\left(\dfrac{e}{a}\right)}$;

2. con $0 < a < 1$, poiché risulta
   $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{a-1} = +\infty$; $e > a \Rightarrow \log\left(\dfrac{e}{a}\right) > 0$, segue che $\dfrac{1}{\log\left(\dfrac{e}{a}\right)} \cdot \lim\limits_{x\to 0^+} x^{a-1} = +\infty$ e quindi il valore del

   limite in esame è $\dfrac{a \log a}{\log\left(\dfrac{e}{a}\right)} + \infty = +\infty$