Studio di funzione e calcolo integrale

Q1- Studiare la funzione $f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}$, determinando gli asintoti , gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi o assoluti, la concavità e gli eventuali punti di flesso. Tracciare il diagramma della funzione.

Q2- Riconosciuto che il diagramma della funzione presenta un punto di flesso, scrivere l'equazione della retta tangente *t* inflessionale.

Q3- Calcolare l'area della regione piana delimitata dal diagramma della curva, dalla tangente inflessionale *t* e dalla retta y=1.

Soluzione

Q1- **Classificazione e dominio**

La funzione è algebrica razionale fratta; il suo dominio è $A=R-\{1\}$.

Segno e zeri- La funzione si annulla solo nel punto *x*=0 ed è positiva in ogni altro punto del dominio.

Limiti ed asintoti

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{(x-1)^2}=\frac{1}{0^+}=1(+\infty)=+\infty\rightarrow$ la retta *x*=1 è asintoto verticale a destra e a sinistra.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}=1;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=\ldots=1$$

La retta y=1 è asintoto orizzontale per x→+∞ e per x→-∞.

Monotonia, massimi e minimi relativi o assoluti.

Dallo studio dei limiti emerge che la funzione non ammette massimo ed il suo estremo superiore è +∞.

Dallo studio del segno e degli zeri si evince che *x*=0 è punto di minimo assoluto, con *f*(0)=0.

Derivata prima

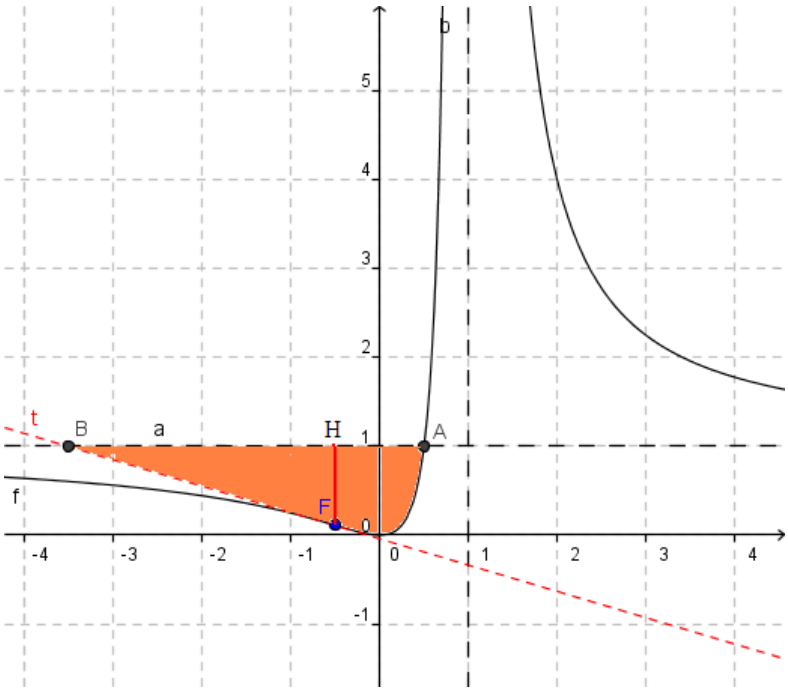
$f'(x)=-\frac{2x}{(x-1)^3}$; $f'(x)>0$ per 0<*x*<1.

La funzione è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli]-∞;0[,]1;+∞[, mentre è strettamente crescente nell'intervallo]0;1[. Il punto *x*=0, in cui si annulla la derivata prima, è l'unico punto stazionario della funzione e in (0;0) la retta tangente al diagramma coincide con l'asse delle ascisse.

Concavità, convessità e flessi

$f''(x)=\frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$; $f''(x)>0$ per $x>-\frac{1}{2}$ e $x\neq 1$.

La funzione è concava nell'intervallo $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ ed è convessa in ciascuno degli intervalli $\left]-\frac{1}{2};1\right[$, $]1;+\infty[$



Il punto $x=-\frac{1}{2}$ è di flesso ascendente; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{9}$.

Q2- Equazione della tangente nel punto di flesso

$$t: y-f\left(-\frac{1}{2}\right)=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\rightarrow t: y=-\frac{8}{27}x-\frac{1}{27}$$

Q3- Considerato il punto B intersezione dell'asintoto orizzontale con la tangente inflessionale e risulta $B\left(-\frac{7}{2};1\right)$, osserviamo che la regione piana di cui si deve trovare l'area è composta dal triangolo rettangolo BHF indicato in figura e da un trapezoide, essendo $H\left(-\frac{1}{2};1\right)$;

in figura è indicato anche il punto $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ in cui il diagramma della funzione taglia l'asintoto orizzontale.

Area del triangolo rettangolo BHF: $S_1=\frac{1}{2}(x_H-x_B)(y_H-y_F)=\frac{4}{3}$

Area del trapezoide

$$S_2=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{(x-1)^2}\right)dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{(x-1)^2}dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2x-2}{x^2-2x+1}dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(x-1)^2}dx=$$

$$\left[-\log\left|x^2-2x+1\right|-\frac{1}{x-1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}+\log 9$$

L'area della regione piana complessiva è: $S=S_1+S_2=\frac{8}{3}+\log 9$