Studio della funzione $f(x)=\sqrt{x}\left|\log x\right|$

1) **Classificazione** - La funzione è trascendente intera con la presenza di una funzione logaritmica ed un radicale quadratico.
2) **Insieme di definizione** - Il radicale quadratico esiste per $x\geq 0$; la funzione logaritmica esiste per $x>0$. Dunque l'insieme di definizione della funzione è A=]0;+∞[.
3) **Segno e zeri**

   $f(x)=0$ se e solo se $\log x=0$, quindi per $x=1$.

   $f(x)>0$ per $x\in A-\{1\}$.

   Osservazione- Poiché nel dominio risulta $f(x)\geq 0$, si deduce che $x=1$ è punto di **minimo assoluto**.

4) **Limiti nei punti di frontiera ed eventuali asintoti**

   La frontiera del dominio è $Fr(A)=\{0;+\infty\}$.

   $$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\left|\log x\right|=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\left(-\log x\right)=-\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}}\log x=0^{+\,(1)}$$

   $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left|\log x\right|=+\infty$ Non esiste asintoto orizzontale per $x\to+\infty$. Facciamo vedere che non esiste neanche asintoto obliquo per $x\to+\infty$.

   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left|\log x\right|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}=0^{+\,(2)}$$

   Il risultato conferma che non esiste asintoto obliquo.

   Dallo studio dei limiti emerge che **la funzione non è limitata superiormente**, quindi **Sup(f)=+∞.**

5) **Monotonia, ricerca degli eventuali punti di massimo e di minimo relativo**

   Osservato che $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{x}\log x & per \quad 0<x<1\\ \sqrt{x}\log x & per \quad x\geq 1\end{cases}$,

   per la funzione derivata prima si ha

---

(1) Si ricordi il limite notevole $\lim_{x\to 0^+}x^r\log_a x=0$, $\forall r>0$ e $\forall a>0\wedge a\neq 1$

(2) Il risultato indicato si può ottenere anche applicando la regola di de l'Hôpital, visto che il limite si presenta la forma indeterminata ∞/∞.

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{2}\log x+1\right) & per \quad 0<x<1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{2}\log x+1\right) & per \quad x>1\end{cases}.$$

Studio della disequazione $f'(x)\geq 0$

Per $0<x<1$

$-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{2}\log x+1\right)\geq 0$, diventa $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{2}\log x+1\right)\leq 0$; tenendo presente che nel dominio di definizione il primo fattore è strettamente positivo la disequazione diventa $\dfrac{1}{2}\log x+1\leq 0$, che è soddisfatta nell'intervallo $0<x\leq e^{-2}$. Nell'intervallo $e^{-2}<x<1$ risulta $f'(x)<0$. Dunque la funzione è strettamente crescente in $]0;e^{-2}[$, strettamente decrescente in $]e^{-2};1[$. Il punto $x=e^{-2}$ è di massimo relativo proprio e si ha $f\left(e^{-2}\right)=-\sqrt{e^{-2}}\cdot\log\left(e^{-2}\right)=2e^{-1}$.

Nel punto $x=1$ la funzione non è derivabile, infatti, studiando i limiti laterali del rapporto incrementale si ha

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-\sqrt{x}\log x}{x-1}=\left(\lim_{x\to 1^-}-\sqrt{x}\right)\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{\log x}{x-1}=-1\cdot\lim_{t\to 0^-}\frac{\log(1+t)}{t}=-1=f_-'(1);$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}\log x}{x-1}=-\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x}\log x}{x-1}=1=f_+'(1)$$

Avendo ottenuto valori diversi per i due limiti laterali si conclude che **la funzione non è derivabile nello punto $x=1$**; **detto punto è angoloso**.

Per $x>1$ la disequazione da studiare è

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log x+1\right)\geq 0$$

Dalla proprietà della funzione logaritmica si deduce che per ogni $x>1$ risulta $f'(x)>0$, per cui nell'intervallo $]1;+\infty[$ la funzione è strettamente crescente e non ha quindi alcun punto di massimo, né di minimo relativo.

Approfondimento- Studio del comportamento del grafico per $x\to 0^+$.

Studiando il limite della derivata prima per $x\to 0^+$ si ricava un'importante informazione sull'andamento del grafico in un intorno destro di $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right) = (-\infty)(-\infty+1) = +\infty$$

Il valore ottenuto indica che **la curva del grafico si avvicina all'origine degli assi tangenzialmente all'asse delle ordinate**.

6) Concavità, convessità e flessi

Per $0<x<1$

$$f''(x) = -\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right) + x^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\log x < 0$$

Nell'intervallo considerato la curva volge la concavità verso il basso; la funzione è dunque concava.

Per $x>1$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\log x < 0$$

Anche nell'intervallo $]1;+\infty[$ la funzione è concava.

Conclusione: la funzione non presenta alcun punto di flesso.

Segue il diagramma della funzione.

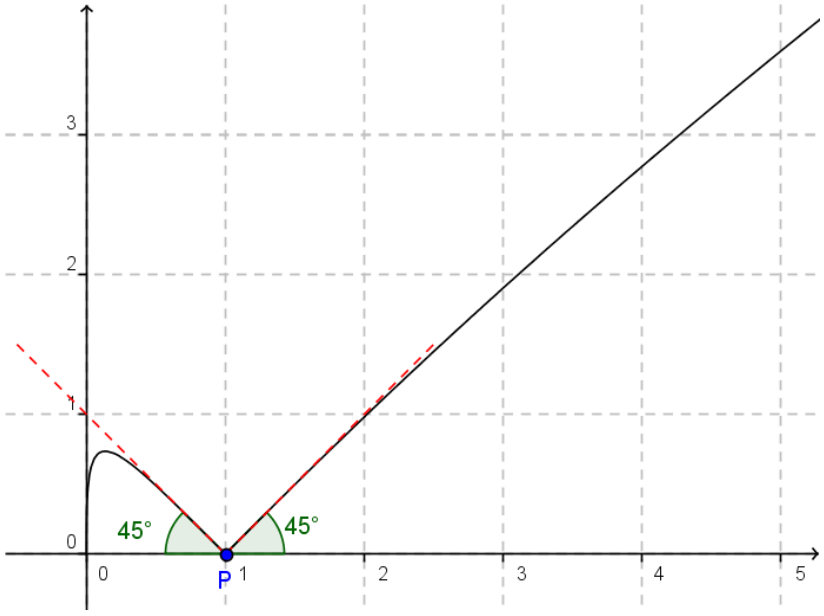

Figura 1-In figura sono rappresentati il grafico della funzione e le due semitangenti allo stesso nel punto angoloso P(1;0).