

Studio della funzione $f(x) = e^{\frac{1}{1-|x|}}$

- 1) **Classificazione** - La funzione è trascendente esponenziale.
- 2) **Insieme di definizione** - Per l'esistenza della funzione deve essere diverso da zero il denominatore della frazione all'esponente, quindi $1-|x| \neq 0$ e ciò si verifica per $x \neq \pm 1$. Pertanto il dominio di definizione è l'insieme $A = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$.
- 3) **Parità** - Si osserva che la funzione è pari, infatti, $\forall x \in A$ risulta anche $-x \in A$ e

$$f(-x) = e^{\frac{1}{1-|-x|}} = e^{\frac{1}{1-|x|}} = f(x)$$

Questa proprietà, ai fini dell'individuazione delle caratteristiche della funzione, permette di limitare le elaborazioni ai valori $x > 0$ e dedurre le corrispondenti caratteristiche per $x < 0$ dai risultati acquisiti nel primo intervallo. Facciamo notare esplicitamente che **il diagramma della funzione è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate**.

4) Positività

La funzione per ogni x del dominio assume solo valori strettamente positivi, dunque non ha zeri.

5) Limiti nei punti di frontiera ed eventuali asintoti. Estremi del codominio.

La frontiera del dominio è $Fr(A) = \{-\infty; -1; 1; +\infty\}$.

Studio del limite per $x \rightarrow 1$

Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-|x|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty, \text{ quindi } \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{1-|x|}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-|x|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \text{ quindi } \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{1-|x|}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0^+. \quad (*)$$

Avendo ottenuto due valori diversi per i limiti laterali si conclude che il limite per $x \rightarrow 1$ non esiste. In particolare possiamo affermare che la retta $x=1$ è asintoto verticale da sinistra per il grafico della funzione.

Per la parità della funzione possiamo affermare che

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} e^{\frac{1}{1-|x|}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} e^{\frac{1}{1-|x|}} = 0^+ \text{ e che la retta } x=-1 \text{ è asintoto verticale da destra per il grafico della funzione.}$$

Studio del limite per $x \rightarrow +\infty$

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$, si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{1-|x|}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} e^t = 1^-$,

e per la parità della funzione anche $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{1-|x|}} = 1^-$.

Concludiamo che la retta $y=1$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$. Facciamo notare che il diagramma della funzione si avvicina all'asintoto orizzontale “dal di sotto”, rispetto al verso positivo delle ordinate.

Estremi della funzione

I valori ottenuti nello studio dei precedenti limiti permettono di affermare che la funzione non è limitata superiormente, dunque che $\text{Sup}(f)=+\infty$; inoltre, sappiamo già che è limitata inferiormente (abbiamo precisato nel p.4 che assume solo valori positivi, quindi zero è un minorante) ed ora possiamo affermare che l'estremo inferiore è proprio lo zero: $\text{Inf}(f)=0$.

6) Monotonia, ricerca degli eventuali punti di massimo e di minimo relativo. Derivabilità

Determiniamo la funzione derivata prima per $x>0$ e studiamone il segno.

Da $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ segue $f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} > 0$, per ogni $x \neq 1$. La funzione non ha punti

critici ed è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli $]0;1[$, $]1;+\infty[$; non esistono punti di massimo o minimo relativo.

Per la parità, possiamo affermare che anche per $x<0$ non esistono punti di massimo o minimo relativo e che la funzione è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$.

Studio particolare per il punto $x=0$

Nel punto $x=0$ la funzione è definita e in un intorno sinistro di questo punto la funzione è strettamente decrescente, mentre in un intorno destro dello stesso è strettamente crescente; pertanto $x=0$ è punto di minimo relativo proprio; $f(0)=e$.

Vogliamo provare che in $x=0$ la funzione non è derivabile e per questo studiamo i limiti laterali del rapporto incrementale. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{1-x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e \left(e^{\frac{1}{1-x}-1} - 1 \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e \left(e^{\frac{x}{1-x}} - 1 \right)}{x \cdot \frac{x}{1-x}} \cdot \frac{x}{1-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e}{1-x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{x}{1-x}} - 1}{\frac{x}{1-x}} = e \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = e \cdot 1 = e = f'_+(0) \end{aligned}$$

Si noti che $f'_+(0)$ rappresenta la derivata destra della funzione nel punto.

Con procedimento analogo si determina la derivata sinistra $f'_-(0)$ nello stesso punto, oppure si può dedurre il corrispondente valore sfruttando la simmetria del diagramma. Si ha $f'_-(0) = -e$.

Si conclude che in $x=0$ la funzione non è derivabile e che tale punto è angoloso. La funzione è derivabile in ogni altro punto del dominio di definizione.

Riportiamo le equazioni delle due semitangenti al diagramma.

$$t^+ : y - f(0) = f'_+(0)x, \text{ da cui } t^+ : y = ex + e;$$

$$t^- : y - f(0) = f'_-(0)x, \text{ da cui } t^- : y = -ex + e.$$

Approfondimento- Studio del comportamento del grafico per $x \rightarrow 1^+$.

Studiando il limite della derivata prima per $x \rightarrow 1^+$ si ricava un'importante informazione sull'andamento del grafico in un intorno destro di $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

Poniamo $\frac{1}{1-x} = t$ e osserviamo che per $x \rightarrow 1^+$ si verifica che $t \rightarrow -\infty$, per cui il limite diventa

$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t \cdot t^2$, che si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. E' noto dalla teoria che il limite esiste e vale zero, tuttavia, a beneficio del lettore, studiamo il limite riconducendolo alla forma ∞/∞ ed applicando due volte la regola di de l'Hôpital.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t \cdot t^2 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2}{e^{-t}} \stackrel{H.}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2t}{e^{-t} \cdot (-1)} \stackrel{H.}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-t}} = \frac{2}{+\infty} = 0^+$$

Il valore ottenuto per il limite e il valore del limite (*) permettono di concludere che il diagramma della funzione si avvicina da destra al punto $x=1$ tangenzialmente all'asse delle ascisse.

Dalla simmetria della curva rispetto all'asse y possiamo a questo punto affermare che si ha lo stesso comportamento anche per $x \rightarrow -1^-$. Il lettore provi come utile esercizio che si ha

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 0^-.$$

7) Concavità, convessità e flessi

Per $x > 0$

$$f''(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{2(1-x)}{(1-x)^4} = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{3-2x}{(1-x)^4}$$

$$f''(x) > 0 \text{ per } (0 < x < 1) \vee \left(1 < x < \frac{3}{2}\right); f''\left(\frac{3}{2}\right) = 0; f''(x) < 0, \text{ per } x > \frac{3}{2}.$$

Dunque la funzione è convessa in ciascuno degli intervalli $]0;1[$, $]\frac{3}{2};+\infty[$ ed è concava

nell'intervallo $]\frac{3}{2};+\infty[$. Il punto $x = \frac{3}{2}$ è di flesso e risulta $f\left(\frac{3}{2}\right) = e^{-2}$; $F_1\left(\frac{3}{2}; e^{-2}\right)$.

Lasciamo al lettore il compito di precisare le caratteristiche relativamente alla concavità, alla convessità e ai punti di flesso per $x < 0$.

Segue il diagramma della funzione.

Comando per le semitangente destra in $x=0$:

Curva[t,exp(1)(t+1),t,0,0.5]

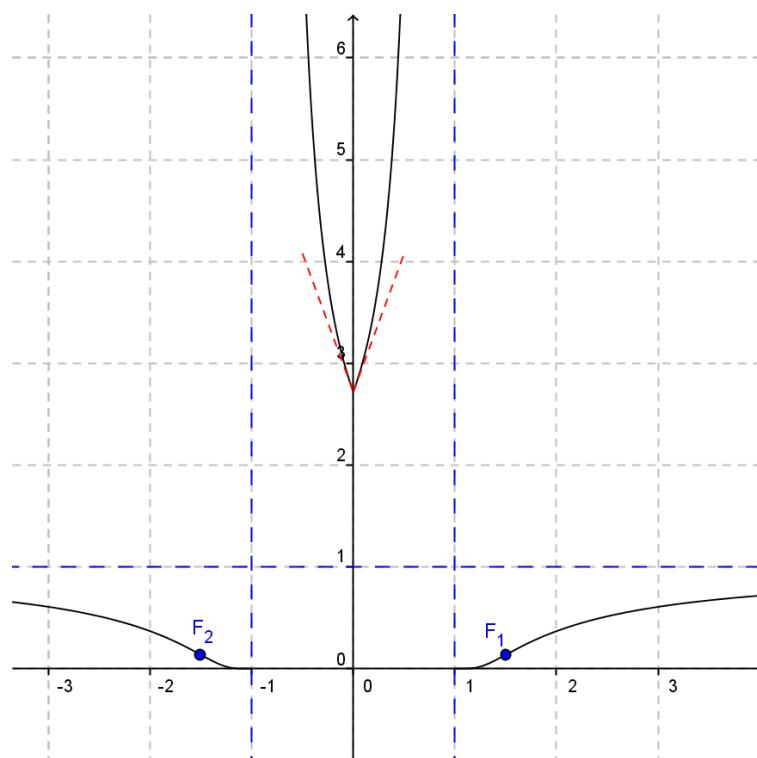


Figura 1-In figura sono rappresentati parzialmente il grafico della funzione, i due asintoti verticali e quello orizzontale, le due semitangenti nel punto angoloso (1;0) e i due punti di flesso.