Studio della funzione $f(x)=e^{\frac{1}{1-|x|}}$

1) **Classificazione** - La funzione è trascendente esponenziale.
2) **Insieme di definizione** - Per l'esistenza della funzione deve essere diverso da zero il denominatore della frazione all'esponente , quindi $1-|x|\neq 0$ e ciò si verifica per $x\neq\pm 1$. Pertanto il dominio di definizione è l'insieme A=R-{-1;1}.
3) **Parità**- Si osserva che la funzione è pari, infatti,$\forall x\in$A risulta anche -$x\in$A e

$$f(-x)=e^{\frac{1}{1-|-x|}}=e^{\frac{1}{1-|x|}}=f(x)$$

Questa proprietà, ai fini dell'individuazione delle caratteristiche della funzione, permette di limitare le elaborazioni ai valori $x>0$ e dedurre le corrispondenti caratteristiche per $x<0$ dai risultati acquisiti nel primo intervallo. Facciamo notare esplicitamente che **il diagramma della funzione è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate**.

4) **Positività**

La funzione per ogni x del dominio assume solo valori strettamente positivi, dunque non ha zeri.

5) **Limiti nei punti di frontiera ed eventuali asintoti. Estremi del codominio.**

La frontiera del dominio è $Fr(A)=\{-\infty;-1;1;+\infty\}$.

Studio del limite per $x\to 1$

Osserviamo che

… quindi $\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{1-|x|}}=+\infty$;

…

Per la parità della funzione possiamo affermare che

...x=-1 è asintoto verticale da destra per il grafico della funzione.

Studio del limite per $x\to+\infty$

…

Estremi della funzione

I valori ottenuti nello studio dei precedenti limiti permettono di affermare che la funzione non è limitata superiormente, dunque che **Sup(f)=+∞;** …

6) **Monotonia, ricerca degli eventuali punti di massimo e di minimo relativo. Derivabilità**

Determiniamo la funzione derivata prima per $x>0$ e studiamone il segno.

…

Studio particolare per il punto $x=0$

Nel punto $x=0$ la funzione è definita e in un intorno sinistro di questo punto la funzione è strettamente decrescente, mentre …

Vogliamo provare che in $x=0$ la funzione non è derivabile e per questo studiamo i limiti laterali del rapporto incrementale. Si ha:

…

…

Approfondimento- Studio del comportamento del grafico per $x\to 1^+$.

Studiando il limite della derivata prima per $x\to 1^+$ si ricava un'importante informazione sull'andamento del grafico in un intorno destro di $x=1$.

…

7) Concavità, convessità e flessi

Per $x>0$

$$f''(x)=\ldots e^{\frac{1}{1-x}}\cdot\frac{3-2x}{(1-x)^4}$$

…

Dunque la funzione è convessa in ciascuno degli intervalli $]0;1[$, $\left]1;\frac{3}{2}\right[$ …

Segue il diagramma della funzione.

…

Figura 1-In figura sono rappresentati parzialmente il grafico della funzione, i due asintoti verticali e quello orizzontale, le due semitangenti nel punto angoloso (1;0) e i due punti di flesso.