Problema di massimo e di minimo vincolati

Problema

Considerata la funzione $f(x;y)=xy$, determinare i punti di massimo e di minimo relativi o assoluti limitatamente al dominio $E=\{(x;y)\in R^2 : x^2+4y^2-4\le 0\}$.

Soluzione

Esistenza del massimo e del minimo assoluti

Il dominio E in cui considerare la funzione e la regione di piano finita delimitata dall'ellisse di equazione

$C: x^2+4y^2-4=0 \to C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, compresi i punti dell'ellisse. Poiché la funzione in esame è continua perché è un polinomio e il dominio E è chiuso e limitato per il **teorema di Weierstrass** la funzione ammette massimo e minimo assoluti. Il massimo ed il minimo assoluti possono essere assunti internamente al dominio E oppure sul bordo , cioè sull'ellisse (frontiera del dominio).

Osserviamo che la funzione in oggetto ammette derivate parziali di qualsiasi ordine e se in un punto interno al dominio vi è un punto critico ivi si devono annullare le due derivate parziali prime. I punti di massimo o di minimo relativo o assoluto interni al dominio sono dei punti critici.

Possiamo verificare intanto se esistono punti interni al dominio nei quali si annullano le due derivate parziali prime.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x;$$

come si vede risulta $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ solo nel punto $O(0;0)$.

Nel punto $O(0;0)$ la funzione $f(x;y)=xy$ si annulla, ma dallo studio del suo segno si riconosce immediatamente che **il punto non è né di massimo, né di minimo relativo**. Infatti, preso un qualsiasi intorno completo I del suddetto punto esistono in esso punti in cui la funzione assume valore positivo (sono i punti interni al primo ed al terzo quadrante), e punti nei quali la funzione assume segno negativo (sono i punti interni al secondo e al quarto quadrante). Deduciamo che i punti in cui la funzione assume il suo valore massimo ed il valore minimo, nonché gli eventuali punti di massimo o minimo relativo, si trovano sulla frontiera del dominio.

Ricerca dei punti di massimo o minimo relativo o assoluti

Presentiamo la ricerca dei punti di massimo e di minimo sull'ellisse C eseguita in due modi. Nel primo metodo sfruttiamo una rappresentazione parametrica dell'ellisse, nel secondo utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Primo metodo (con l'equazione parametrica dell'ellisse)

Dalla forma canonica dell'ellisse $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, si deduce che la curva può essere rappresentata parametricamente dalle equazioni

$x = 2\cos\theta$, $\quad y = sen\theta$, con $0 \le \theta \le 2\pi$.

L'espressione della funzione $f(x;y) = xy$ sui punti dell'ellisse è:

$f(x;y) = f(2\cos\theta; sen\theta) = 2\cos\theta sen\theta = sen(2\theta)$.

L'espressione ottenuta indica che la funzione ha come massimo assoluto il valore 1 e come minimo assoluto il valore -1.

Il **massimo assoluto** è assunto nei punti dell'ellisse per i quali si ha

$2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \to \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e dunque per i valori dell'angolo $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ e $\theta_2 = \frac{5\pi}{4}$.

In coordinate cartesiane i due punti di massimo assoluto dell'ellisse sono

$P_1\left(2\cos\frac{\pi}{4}; sen\frac{\pi}{4}\right) = P_1\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\quad P_2\left(2\cos\frac{5\pi}{4}; sen\frac{5\pi}{4}\right) = P_2\left(-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Analogamente,il **minimo assoluto** è assunto nei punti dell'ellisse per i quali si ha:

$2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \to \theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e dunque per i valori dell'angolo $\theta_3 = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta_4 = \frac{7\pi}{4}$.

In coordinate cartesiane i due punti di minimo assoluto sono

$P_3\left(2\cos\frac{3\pi}{4}; sen\frac{3\pi}{4}\right) =$

$P_3\left(-\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$P_4\left(2\cos\frac{7\pi}{4}; sen\frac{7\pi}{4}\right) =$

$P_4\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

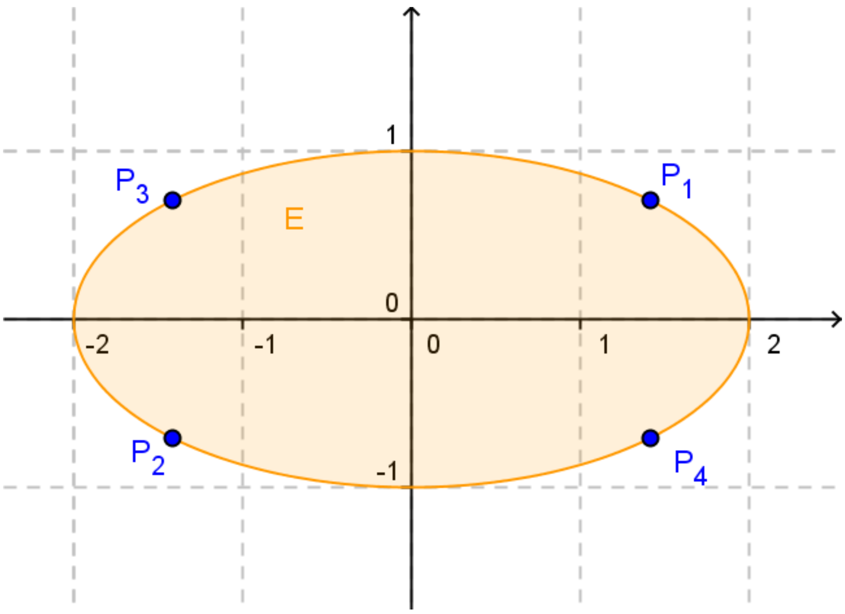

Figura 1-Il dominio E in cui è valutata la funzione è composto dall'ellisse con centro nell'origine degli assi e semiassi a=2, b= 1 e dai punti interni alla stessa curva.

Secondo metodo (con i moltiplicatori di Lagrange)

Poniamo $\varphi(x;y) = x^2 + 4y^2 - 4$

, dunque il vincolo è rappresentato dall'equazione

$\varphi(x;y)=0$, e consideriamo la funzione ausiliaria in due variabili

$\Phi(\lambda;x;y)=f(x;y)+\lambda\varphi(x;y)$, essendo λ il moltiplicatore di Lagrange.

Com'è noto si tratta di determinare i valori di x, y, λ per i quali il gradiente di $\Phi(\lambda;x;y)$ si annulla e calcolare i valori della funzione $f(x;y)$ nei corrispondenti punti appartenenti all'ellisse *C*.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=y+2\lambda x=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=x+8\lambda y=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=x^2+4y^2-4=0.$$

Risolvendo il sistema formato dalle tre equazioni indicate si ottengono le seguenti terne:

$\left(\lambda=-\frac{1}{4};x=\sqrt{2};y=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, alla quale corrisponde il precedente punto $P_1\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$\left(\lambda=-\frac{1}{4};x=-\sqrt{2};y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, alla quale corrisponde il precedente punto $P_2\left(-\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$\left(\lambda=\frac{1}{4};x=-\sqrt{2};y=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, alla quale corrisponde il precedente punto $P_3\left(-\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$\left(\lambda=\frac{1}{4};x=\sqrt{2};y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, alla quale corrisponde il precedente punto $P_4\left(\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Calcolando i valori della funzione nei quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 si ha:

$f(P_1)=1,\ f(P_2)=1,\ f(P_3)=-1,\ f(P_4)=-1,$

per cui si conclude che P_1, P_2 sono punti di massimo e P_3, P_4 sono punti di minimo per la funzione.

Come si vede, anche con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange sono stati trovati gli stessi punti ottenuti con il primo metodo.

Grafico tridimensionale

Riportiamo un' immagine parziale della superficie $\Sigma: z=xy$, con le variabili x, y che descrivono il quadrato [-5;5]x[-5;5]; nell'immagine è presente anche il piano coordinato z=0 (in colore giallo). Dall'immagine si evince che la superficie ha punti con quota positiva nel primo e terzo quadrante e punti con quota negativa nel secondo e quarto quadrante.

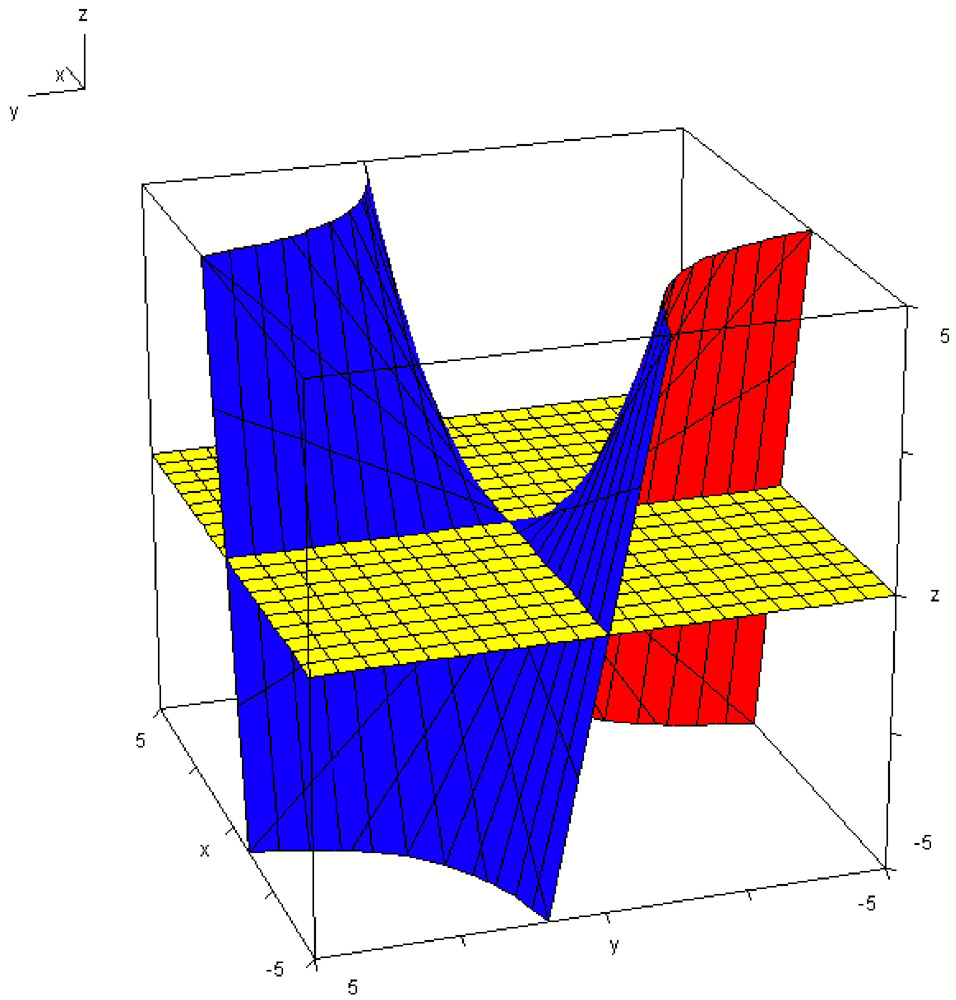

Figura 2-In figura sono presenti la superficie di equazione z= xy ed il piano coordinato z=0

Esercizio proposto

Dimostrare che la stessa funzione limitatamente al dominio $D=\{(x;y)\in R^2 : x^2+y^2-1\leq 0\}$ assume il valore massimo nei punti $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ed il massimo vale 1, e assume il valore minimo, che vale -1, nei punti $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.