Problema di Cauchy

(Risoluzione di un'equazione di Bernoulli)

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 2x}{2y(1-x)} \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

Soluzione

Osserviamo che l'equazione differenziale è definita per $x \neq 1$ e che la funzione incognita y(x) non si potrà annullare in alcun punto del dominio. Considerato che interessa determinare la soluzione del problema di Cauchy in un intorno del punto x=2, limitiamo la ricerca per x>1.

Si può trasformare l'equazione differenziale scrivendola nella forma seguente

$$y' = \frac{y}{2(1-x)} - \frac{x}{y(1-x)}$$

dalla quale si riconosce che si tratta di un'equazione del tipo di Bernoulli[1].

Per quanto premesso sulla funzione y(x) possiamo moltiplicare ambo i membri per y(x) ed ottenere l'ulteriore forma equivalente

$$y' \cdot y = \frac{[y(x)]^2}{2(1-x)} - \frac{x}{(1-x)} \qquad (1)$$

Si procede nella ricerca della soluzione introducendo la funzione

$$z(x) = [y(x)]^2 \qquad (2)$$

la cui derivata prima rispetto alla variabile x è

$$z'(x) = \frac{dz}{dx} = 2y \cdot y' \Rightarrow \ y \cdot y' = \frac{z'(x)}{2}$$

L'equazione (1) assume la nuova forma

$$z'(x) + \frac{z(x)}{x-1} = \frac{2x}{x-1} \qquad (3)$$

L'equazione (3) è lineare, del primo ordine ed a coefficienti variabili.

Con

$$a(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad (4)$$

consideriamo l'integrale

$$A(x) = \int a(x)dx \ = \int \frac{dx}{x-1} = \log|x-1| + c$$, che per l'ipotesi x>1 diventa

$$A(x) = \log(x-1) + k \qquad (5)$$

Per i nostri scopi interessa che $A(x)$ sia una primitiva della funzione $a(x)$, per cui possiamo scegliere per la costante additiva k che compare nella (5) il valore zero, quindi considerare

$$A(x) = \log(x-1).$$

Con la posizione (4) l'equazione (3) assume la forma seguente

$$z'(x) + a(x) \cdot z(x) = \frac{2x}{x-1} \qquad (6)$$

Moltiplicando entrambi i membri della (6) per $e^{A(x)}$ si ha

[1] Ricordiamo che si dice di Bernoulli un'equazione differenziale del primo ordine della forma $y' = a(x) \cdot y(x) + b(x) \cdot [y(x)]^{\alpha}, \ \forall \alpha \in R_0 - \{1\}$

$$z'(x)\cdot e^{A(x)}+a(x)\cdot z(x)\cdot e^{A(x)}=\frac{2x}{x-1}\cdot e^{A(x)} \qquad (7)$$

Poiché risulta $\frac{dA(x)}{dx}=a(x)$ si nota che al primo membro della (7) è presente la derivata prima della funzione $z(x)\cdot e^{A(x)}$. Possiamo perciò scrivere la (7) nella forma seguente

$$D\left(z(x)\cdot e^{A(x)}\right)=\frac{2x}{x-1}\cdot e^{A(x)} \qquad (8)$$

D'altra parte si ha

$$e^{A(x)}=e^{\log(x-1)}=x-1$$

e quindi la (8) diventa

$$D\left(z(x)\cdot(x-1)\right)=\frac{2x}{\cancel{(x-1)}}\cdot\cancel{(x-1)} \quad \Leftrightarrow D\left(z(x)\cdot(x-1)\right)=2x \qquad (9)$$

valendo la condizione $x>1$, come già precisato.
Integrando ambo i membri della (9) ricaviamo

$$\int D\left(z(x)\cdot(x-1)\right)dx=\int 2x dx \Rightarrow z(x)\cdot(x-1)=x^2+c \Rightarrow$$

$$z(x)=\frac{x^2+c}{x-1} \qquad (10)$$

La (10) esprime l'integrale generale dell'equazione (3). Dalla posizione (2), tenendo conto che in un intorno del punto iniziale $x=2$ risulta $y(x)=2>0$ deduciamo per l'integrale generale della (1) l'espressione analitica

$$y(x)=\sqrt{\frac{x^2+c}{x-1}}$$

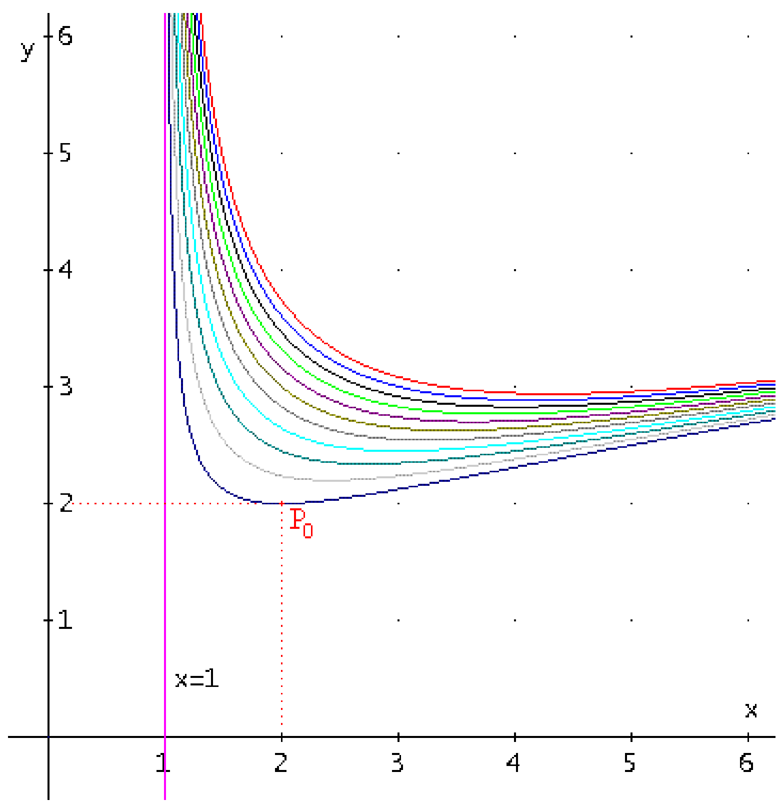
Ricerca della soluzione particolare del problema di Cauchy

Per determinare la soluzione particolare che risolve il problema di Cauchy imponiamo che sia soddisfatta la soluzione al contorno y(2)=2. Si ha

$$y(2)=\sqrt{4+c}=2 \Rightarrow c=0$$

Concludiamo che la soluzione del problema di Cauchy in esame è la funzione

$$y(x)=\sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$$



Rappresentazione grafica

Servendoci di Derive possiamo rappresentare alcune curve integrali appartenenti all'integrale generale dell'equazione differenziale che abbiamo studiato. L'istruzione che si deve utilizzare è la seguente: vector(√((x^2+c)/(x-1)),c,10,0,-1)

La funzione **vector** permette di gestire equazioni parametriche. Nel nostro caso il parametro è **c;** nella formula comunichiamo a Derive che si assegnino a c i valori interi da 10 a zero con passo=-1. Nella figura si possono osservare le undici curve integrali corrispondenti. La soluzione del problema di Cauchy è quella che passa dal punto $P_0(2;2)$.