Un integrale parametrico

Si calcoli l'integrale indefinito
$\int e^{-Lx}x^n dx$, con $L\in\mathbb{R}^+$ ed $n\in\mathbb{N}_0$.

Soluzione

L'integrale si calcola applicando n volte la formula di integrazione per parti al fine di eliminare la potenza x^n dalla funzione integranda; in tal modo ci si riconduce ad un integrale immediato.
Osserviamo che si ha

$$\int e^{-Lx}x^n dx=\frac{1}{-L}\int e^{-Lx}(-L)x^n dx=\frac{1}{-L}\int D\left(e^{-Lx}\right)x^n dx=\frac{1}{-L}\left[e^{-Lx}x^n-\int e^{-Lx}nx^{n-1}dx\right]=$$

$$\frac{e^{-Lx}x^n}{-L}+\frac{n}{L}\int e^{-Lx}x^{n-1}dx=-\frac{e^{-Lx}x^n}{L}+\frac{n}{L}\cdot\frac{1}{-L}\int e^{-Lx}(-L)x^{n-1}dx=-\frac{e^{-Lx}x^n}{L}-\frac{n}{L^2}\cdot\int D\left(e^{-Lx}\right)x^{n-1}dx=$$

$$-\frac{e^{-Lx}x^n}{L}-\frac{n}{L^2}\cdot\left[e^{-Lx}x^{n-1}-\int e^{-Lx}(n-1)x^{n-2}dx\right]=-\frac{e^{-Lx}x^n}{L}-\frac{ne^{-Lx}x^{n-1}}{L^2}+\frac{n(n-1)}{L^2}\int e^{-Lx}x^{n-2}dx=$$

$$-\frac{e^{-Lx}x^n}{L}-\frac{ne^{-Lx}x^{n-1}}{L^2}+\frac{n(n-1)}{L^2}\cdot\frac{1}{-L}\int D\left(e^{-Lx}\right)x^{n-2}dx=$$

$$-\frac{e^{-Lx}x^n}{L}-\frac{ne^{-Lx}x^{n-1}}{L^2}-\frac{n(n-1)}{L^3}\left[e^{-Lx}x^{n-2}-\int e^{-Lx}(n-2)x^{n-3}dx\right]=$$

$$-\frac{e^{-Lx}x^n}{L}-\frac{ne^{-Lx}x^{n-1}}{L^2}-\frac{n(n-1)e^{-Lx}x^{n-2}}{L^3}+\frac{n(n-1)(n-2)}{L^3}\int e^{-Lx}x^{n-3}dx=$$

e dopo n passaggi si arriva alla forma seguente

$$-\frac{e^{-Lx}x^n}{L}-\frac{ne^{-Lx}x^{n-1}}{L^2}-\frac{n(n-1)e^{-Lx}x^{n-2}}{L^3}-\frac{n(n-1)(n-2)e^{-Lx}x^{n-3}}{L^4}+\ldots+\frac{n!}{L^n}\int e^{-Lx}dx=$$

$$-\frac{e^{-Lx}x^n}{L}-\frac{ne^{-Lx}x^{n-1}}{L^2}-\frac{n(n-1)e^{-Lx}x^{n-2}}{L^3}-\frac{n(n-1)(n-2)e^{-Lx}x^{n-3}}{L^4}+\ldots+\frac{n!e^{-Lx}}{L^n(-L)}+C=$$

$$-\frac{e^{-Lx}}{L}\left[x^n+\frac{nx^{n-1}}{L^1}+\frac{n(n-1)x^{n-2}}{L^2}+\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{L^3}+\ldots+\frac{n!x^{n-n}}{L^n}\right]+C$$

L'espressione ottenuta si può scrivere in forma compatta come segue

$-\frac{e^{-Lx}}{L}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!L^k}x^{n-k}$, nella quale si deve porre $x^0=1$