Integrale triplo[1]

Calcolare il seguente integrale

$\iiint_D \left(x^2+y^2\right)zdxdydz$, essendo D il dominio dello spazio R^3 così definito:

$$D=\left\{(x;y;z)\in R^3 \middle| \left(x^2+y^2+z^2\le 1\right)\wedge\left(z\ge\sqrt{x^2+y^2}\right)\right\}$$

Soluzione

Risolviamo l'integrale definito ricorrendo alle coordinate sferiche.

Il generico punto P(x;y;z) ha coordinate (ρ;θ;φ) con le limitazioni:

$0\le\rho\le 1$, perché il punto deve appartenere alla sfera di raggio unitario con centro nell'origine (0;0;0),

$0\le\theta\le 2\pi$ e $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$; per la limitazione su φ osserviamo che φ rappresenta l'angolo formato dal segmento OP con la direzione positiva dell'asse z e che il punto P deve avere z non negativa.

Le formule per il passaggio dalle coordinate sferiche a quelle cartesiane sono

$x=\rho sen\varphi\cos\theta$, $\quad y=\rho sen\varphi sen\theta$, $\quad z=\rho\cos\varphi$.

La limitazione $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ espressa in coordinate sferiche diventa

$$\rho\cos\varphi\ge\sqrt{\rho^2sen^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2sen^2\varphi sen^2\theta}\rightarrow\rho\cos\varphi\ge\rho\sqrt{sen^2\varphi\left(\cos^2\theta+sen^2\theta\right)}\rightarrow\cos\varphi\ge sen\varphi.$$

La disequazione ottenuta, tenendo conto della limitazione $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, è soddisfatta per $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

Per il calcolo dell'integrale definito in coordinate sferiche, come argomento dell'integrale, oltre all'espressione della funzione integranda

$$f(x;y;z)=\left(x^2+y^2\right)z$$

deve figurare il modulo dello Jacobiano

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\rho}\\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}sen\varphi\cos\theta & sen\varphi sen\theta & \cos\varphi\\ \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi sen\theta & -\rho sen\varphi\\ -\rho sen\varphi sen\theta & \rho sen\varphi\cos\theta & 0\end{vmatrix}=\rho^2 sen\varphi$$

Calcolo dell'integrale.

[1] Esercizio assegnato in una prova d'esame di Analisi matematica II nel Corso di Laurea in Ingegneria a Lecce

$$\iiint_D \left(x^2+y^2\right) z dxdydz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^1\left(\rho^2 sen^2\varphi\left(\cos^2\theta+sen^2\theta\right)\rho\cos\varphi\cdot\rho^2 sen\varphi\right)d\rho\right)d\varphi\right)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^1\left(\rho^5 sen^3\varphi\cdot\cos\varphi\right)d\rho\right)d\varphi\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1\right)sen^3\varphi\cdot\cos\varphi d\varphi\right)d\theta =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen^3\varphi\cdot\cos\varphi d\varphi\right)d\theta = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\left(\left[\frac{sen^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right)d\theta = \frac{1}{24}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 d\theta = \frac{1}{96}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{48}$$