Calcolo di integrali

Nota teorica

Per il calcolo dell'integrale indefinito

$$\int \frac{x^k}{\left(ax+b\right)^n}dx\,,$$

con k ed n interi positivi ed n>k, si può procedere con il metodo di integrazione per parti che dovrà essere applicato k volte prima di ricondursi ad un integrale immediato. Infatti, scrivendo l'integrale nella seguente forma

$$\int x^k\left(ax+b\right)^{-n}dx$$

si riconosce che la funzione integranda si può scrivere come il prodotto di x^k con una primitiva di $\left(ax+b\right)^{-n}$; precisamente si può scrivere

$$\int x^k\left(ax+b\right)^{-n}dx = \int x^k D\left(\frac{\left(ax+b\right)^{-n+1}}{a(-n+1)}\right)dx$$

Applicando il metodo di integrazione per parti si ottiene

$$\int x^k D\left(\frac{\left(ax+b\right)^{-n+1}}{a(-n+1)}\right)dx = x^k\cdot\frac{\left(ax+b\right)^{-n+1}}{a(-n+1)} - \int kx^{k-1}\cdot\frac{\left(ax+b\right)^{-n+1}}{a(-n+1)}dx = x^k\cdot\frac{\left(ax+b\right)^{-n+1}}{a(-n+1)} +$$
$$\frac{k}{a(n-1)}\int x^{k-1}\left(ax+b\right)^{-n+1}dx$$

L'integrale residuo presenta la potenza x^{k-1} con esponente inferiore di uno rispetto x^k. La funzione integranda è dello stesso tipo della funzione integranda dell'integrale di partenza e si può applicare ancora il metodo di integrazione per parti. Dopo *k* passaggi rimarrà un integrale che si potrà calcolare immediatamente perché sarà il prodotto di una costante per l'integrale di seguito riportato.

$$\int\left(ax+b\right)^{-n+k}dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{\left(ax+b\right)^{-n+k+1}}{-n+k+1}+c$$

Risolviamo alcuni esercizi.

Es_1) Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_4^{+\infty}\frac{x^2}{\left(x+3\right)^4}dx$$

Osservazione

Notiamo subito che l'integrale proposto è convergente perché la funzione integranda nell'intervallo [4;+∞[è continua e per x→+∞ è un infinitesimo del secondo ordine. Per definizione il valore richiesto è

$$\lim_{k\to+\infty}\int_4^{k}\frac{x^2}{\left(x+3\right)^4}dx$$

Occupiamoci del calcolo dell'integrale indefinito

Procediamo con il metodo di integrazione per parti così come indicato prima.

$$\int\frac{x^2}{\left(x+3\right)^4}dx = \int x^2 D\left(\frac{(x+3)^{-3}}{-3}\right)dx = x^2\cdot\frac{(x+3)^{-3}}{-3} - \int 2x\cdot\frac{(x+3)^{-3}}{-3}dx = \frac{x^2}{-3(x+3)^3}+$$

$$\frac{2}{3}\int x\cdot(x+3)^{-3}dx=\frac{x^2}{-3(x+3)^3}+\frac{2}{3}\int x\cdot D\left(\frac{(x+3)^{-2}}{-2}\right)dx=\frac{x^2}{-3(x+3)^3}+$$

$$\frac{2}{3}\left[x\cdot\frac{(x+3)^{-2}}{-2}-\int 1\cdot\frac{(x+3)^{-2}}{-2}dx\right]=\frac{x^2}{-3(x+3)^3}-\frac{x}{3(x+3)^2}+\frac{1}{3}\int(x+3)^{-2}dx=\frac{x^2}{-3(x+3)^3}-\frac{x}{3(x+3)^2}+$$

$$-\frac{1}{3(x+3)}+C$$

Calcoliamo ora l'integrale generalizzato

$$\lim_{k\to+\infty}\int_4^k\frac{x^2}{(x+3)^4}dx=\lim_{k\to+\infty}\left[\frac{x^2}{-3(x+3)^3}-\frac{x}{3(x+3)^2}-\frac{1}{3(x+3)}\right]_4^k=$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left\{\left[\frac{k^2}{-3(k+3)^3}-\frac{k}{3(k+3)^2}-\frac{1}{3(k+3)}\right]+\left(\frac{4^2}{3\cdot7^3}+\frac{4}{3\cdot7^2}+\frac{1}{3\cdot7}\right)\right\}=0+\frac{31}{343}=\frac{31}{343}$$

Es_2) Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_6^{+\infty}\frac{x^4}{(x+4)^7}dx$$

Soluzione

Per definizione si ha $\int_6^{+\infty}\frac{x^4}{(x+4)^7}dx=\lim_{k\to+\infty}\int_6^k\frac{x^4}{(x+4)^7}dx$

e possiamo affermare che l'integrale è convergente perché la funzione integranda nell'intervallo $[6;+\infty[$ è continua e per $x\to+\infty$ è un infinitesimo del terzo ordine.
Il calcolo dell'integrale indefinito fornisce il seguente risultato

$$\int\frac{x^4}{(x+4)^7}dx=-\frac{x^4}{6(x+4)^6}-\frac{2x^3}{15(x+4)^5}-\frac{x^2}{10(x+4)^4}-\frac{x}{15(x+4)^3}-\frac{1}{30(x+4)^2}+C$$

Il valore dell'integrale generalizzato è:

$$\int_6^{+\infty}\frac{x^4}{(x+4)^7}dx=\lim_{k\to+\infty}\int_6^k\frac{x^4}{(x+4)^7}dx=\frac{6^4}{6\cdot10^6}+\frac{2\cdot6^3}{15\cdot10^5}+\frac{6^2}{10\cdot10^4}+\frac{6}{15\cdot10^3}+\frac{1}{30\cdot10^2}=$$

$$\frac{1}{10^3}\cdot\left[\frac{6\cdot6^2}{10\cdot10^2}+\frac{2\cdot6\cdot6^2}{15\cdot10^2}+\frac{6^2}{10^2}+\frac{11}{15}\right]=\frac{599}{375000}$$

Es_3) Provare che risulta

$$\int_5^{+\infty}\frac{x^3}{(x+7)^6}dx=\frac{571}{622080}$$

N.B. Il valore indicato è stato ottenuto con l'applicazione Derive 6