Lavoro dell'11-06-2010

Quadrifoglio

(Un integrale doppio per l'area di un quadrifoglio)

Calcolare l'area del dominio piano definito dalla curva avente equazione

$\left(x^2+y^2\right)^3-4x^2y^2=0$ ricadente nel primo quadrante

Soluzione

Il valore dell'area del dominio piano racchiuso dalla curva di cui è assegnata l'equazione è fornito dal seguente integrale doppio

$$\iint_D 1dxdy \qquad (1)$$

nel quale D rappresenta appunto il dominio piano di cui si deve calcolare l'area.
Per il calcolo dell'integrale (1) è opportuno passare dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari ponendo

$$x=\rho\cos\theta\,,\ \ y=\rho sen\theta \qquad (2)$$

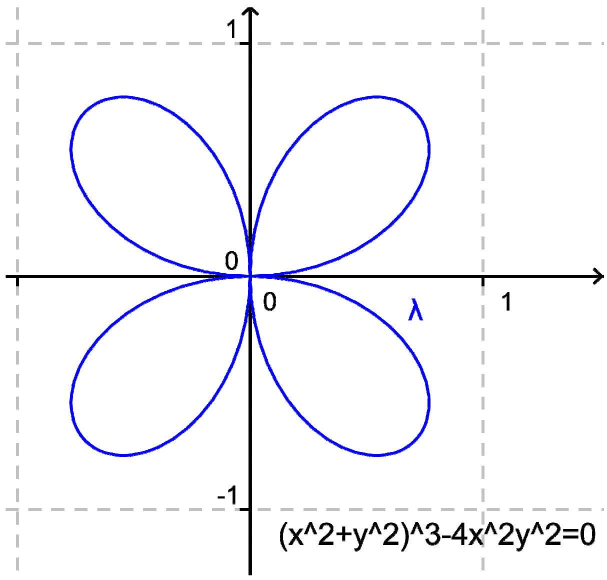
Ricordiamo, però, che il passaggio dalle coordinate cartesiane a quelle polari, ai fini del calcolo dell'integrale definito, comporta la presenza del valore assoluto dello Jacobiano

$$\text{J=}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho sen\theta\\ sen\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix}=\rho$$

come fattore della funzione integranda

Si passa dall'equazione cartesiana $\lambda:\left(x^2+y^2\right)^3-4x^2y^2=0$ della curva a quella in coordinate polari effettuando le sostituzioni (2) e semplificando. Limitatamente all'arco del primo quadrante risulta

$$\begin{cases}\rho=sen(2\theta)\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$$



Operatività con GeoGebra

Possiamo rappresentare la curva nel piano ed osservare il dominio piano D delimitato dalla stessa.
Tenendo conto della relazione $\rho=sen\left(2\theta\right)$ *ottenuta, le equazioni parametriche della curva diventano:*
$x=sen\left(2\theta\right)\cos\theta$, $\quad y=sen\left(2\theta\right)sen\theta$, *con*
$0\le\theta\le2\pi$.
Per ottenere la curva nel piano si deve digitare nella barra della formula la seguente stringa:

*Curva[sin(2t)*cos(t),sin(2t)*sin(t),t,0,2*Pi]*

nella quale abbiamo utilizzato più comodamente la variabile t che assume valori da 0 a 2π *(radianti).*
Ricordiamo che il numero π *è riconosciuto dall'identificatore P*i.

Calcoliamo ora l'integrale doppio richiesto. Integriamo prima su ρ e successivamente su θ. Si ha:

$$\iint_D 1dxdy=\iint_D \rho d\rho d\theta=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\rho=0}^{sen2\theta}\rho d\rho=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{sen2\theta}=\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}sen^2 2\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos4\theta}{2}d\theta=\frac{\pi}{8}$$

Luigi Lecci: *www.matematicaescuola.it*