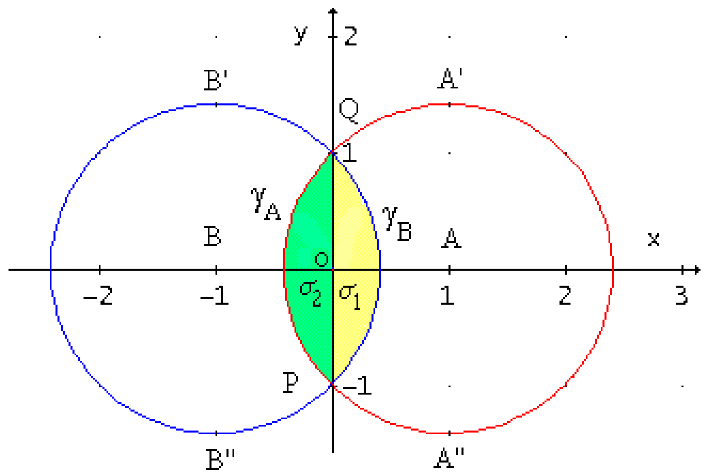
Integrale doppio[1]

Calcolare il seguente integrale doppio

$\iint_E \frac{x}{\sqrt{2-y^2}}\,dxdy$, essendo E la regione piana comune ai due cerchi di centri A(1;0), B(-1;0) e delimitati rispettivamente dalle circonferenze Γ_A, Γ_B aventi raggio $r=\sqrt{2}$.
Il dominio è riportato in colore in figura)

Soluzione



Osserviamo che il dominio E è normale rispetto ai due assi. Conviene eseguire l'operazione d'integrazione assumendolo normale rispetto all'asse delle ordinate e quindi si devono esplicitare le equazioni degli archi di circonferenze che lo delimitano nella forma $x=x(y)$.
L'equazione della circonferenza Γ_A avente centro in A(1;0) è

$\Gamma_A : (x-1)^2 + y^2 = 2$. (1)

Per ottenere l'equazione del suo arco γ_A che ricade nel secondo e terzo quadrante si deve esplicitare innanzitutto dall'equazione (1) la variabile x in funzione della varabile y. Si ottengono le due equazioni

$$\Gamma'_A : x = 1-\sqrt{2-y^2} \qquad (1.1)$$

$$\Gamma''_A : x = 1+\sqrt{2-y^2} \qquad (1.2)$$

Si riconosce che l'equazione dell'arco γ_A si deduce dalla (1.1) con $y\in[-1;1]$, quindi

$$\begin{cases} \gamma_A : x = 1-\sqrt{2-y^2} \\ -1 \le y \le 1 \end{cases} \qquad (1.3)$$

Con procedimento analogo, scrivendo l'equazione della circonferenza Γ_B, di centro B

$$\Gamma_B : (x+1)^2 + y^2 = 2 \qquad (2)$$

ed esplicitando x rispetto ad y si ottengono le due equazioni

$$\Gamma'_B : x = -1+\sqrt{2-y^2} \qquad (2.1)$$

$$\Gamma''_B : x = -1-\sqrt{2-y^2} \qquad (2.2)$$

delle quali la (2.1) rappresenta la semicirconferenza di diametro B′B″ che attraversa anche il primo ed il quarto quadrante, dunque contiene l'arco γ_B che delimita il dominio. L'equazione di quest'ultimo è perciò

$$\begin{cases} \gamma_B : x = -1+\sqrt{2-y^2} \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$$

[1] Quesito assegnato nella prova d'esame di Matematica II presso la facoltà d'Ingegneria a Lecce in data 14-01-2003

Calcolo dell'integrale

$$\iint_E \frac{x}{\sqrt{2-y^2}}dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{2-y^2}}\int_{1-\sqrt{2-y^2}}^{-1+\sqrt{2-y^2}} xdx\right)dy = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{2-y^2}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1-\sqrt{2-y^2}}^{-1+\sqrt{2-y^2}}\right)dy =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{2-y^2}}\left[\left(-1+\sqrt{2-y^2}\right)^2-\left(1-\sqrt{2-y^2}\right)^2\right]\right)dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2-y^2}}[0]dy = 0$$

Il valore dell'integrale definito è dunque zero.

Considerazioni sulla simmetria della funzione e del dominio

La funzione integranda f(x;y) è dispari rispetto alla variabile *x* ed è pari rispetto alla variabile y. Il dominio **E** d'integrazione è simmetrico rispetto ai due assi. Ciò è sufficiente a garantire che il valore dell'integrale è nullo. Infatti, in riferimento alla figura, applicando la proprietà additiva dell'integrale, possiamo anche calcolare l'integrale proposto come la somma dei valori degli integrali definiti estesi ai due domini σ_1, σ_2 che rappresentano rispettivamente la parte di cerchio delimitato dalla circonferenza Γ_B ricadente nel primo e quarto quadrante, e della parte di cerchio di delimitato dalla circonferenza Γ_A ricadente nel secondo e terzo quadrante.

$$\iint_E \frac{x}{\sqrt{2-y^2}}dxdy = \iint_{\sigma_1} \frac{x}{\sqrt{2-y^2}}dxdy + \iint_{\sigma_2} \frac{x}{\sqrt{2-y^2}}dxdy$$

Preso un qualsiasi punto P(x;y) di σ_1 possiamo considerare il suo simmetrico P'(-x;y) in σ_2 ; è evidente che risulta f(P')=-f(P).

Supponiamo di considerare un'areola $\Delta\sigma$ intorno al punto P di misura Δs e la corrispondente areola $\Delta\sigma'$, simmetrica di $\Delta\sigma$ rispetto all'asse delle ordinate, disposta intorno al punto P', la cui misura è ancora Δs.

Se la misura Δs è infinitesima, dal significato di integrale definito, possiamo scrivere l'approssimazione

$$\iint_{\Delta\sigma} \frac{x}{\sqrt{2-y^2}}dxdy \simeq f(P)\cdot\Delta s \; ;$$

analogamente possiamo scrivere

$$\iint_{\Delta\sigma'} \frac{x}{\sqrt{2-y^2}}dxdy \simeq f(P')\cdot\Delta s$$

e dall'uguaglianza f(P')=-f(P) segue che

$$\iint_{\Delta\sigma} \frac{x}{\sqrt{2-y^2}}dxdy + \iint_{\Delta\sigma'} \frac{x}{\sqrt{2-y^2}}dxdy \simeq f(P)\cdot\Delta s + f(P')\cdot\Delta s =$$

$$f(P)\cdot\Delta s - f(P)\cdot\Delta s = 0$$

Facendo variare l'areola $\Delta\sigma$ fino a coprire la regione σ_1, la corrispondente areola $\Delta\sigma'$ copre la regione σ_2 e ripetendo le stesse considerazioni si perviene alla conclusione che l'integrale doppio in esame su tutto il dominio E è nullo.