Studio di funzione

(Esercizio di prova d'esame per studenti di Chimica presso l'Università di Parma)

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}$$

1) Classificazione: funzione algebrica irrazionale fratta
2) Dominio: *C.E.* $x\neq -2 \rightarrow A=\mathbb{R}-\{-2\}$
3) Segno e zeri: la funzione non ha zeri

$$f(x)>0 \qquad - - - - - - - - - - - - \overset{-2}{} \longrightarrow$$

La funzione è positiva per $x>-2$ ed è negativa per $x<-2$.

4) Limiti ed eventuali asintoti

$\mathscr{F}r(A)=\{-\infty;-2;+\infty\}$

5) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=\dfrac{\sqrt{5}}{0^+}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=\dfrac{\sqrt{5}}{0^-}=-\infty$, quindi la retta *x*=-2 è asintoto verticale a destra e a sinistra.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{1}{1+0}=1,$$

quindi la retta di equazione y=1 è asintoto orizzontale per $x\to+\infty$;

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{-1}{1+0}=-1,$$

quindi la retta di equazione y=-1 è asintoto orizzontale per $x\to-\infty$.

6) Monotonia, massimi e minimi relativi o assoluti

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot(x+2)-\sqrt{x^2+1}\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{x(x+2)-\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x+2)^2}=\frac{x^2+2x-x^2-1}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x+2)^2}=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x+2)^2}\geq 0$$

la disequazione, nel dominio della funzione, è soddisfatta per i valori della variabile per i quali è non negativo il numeratore.

$2x-1\geq 0\rightarrow x\geq\dfrac{1}{2}$.

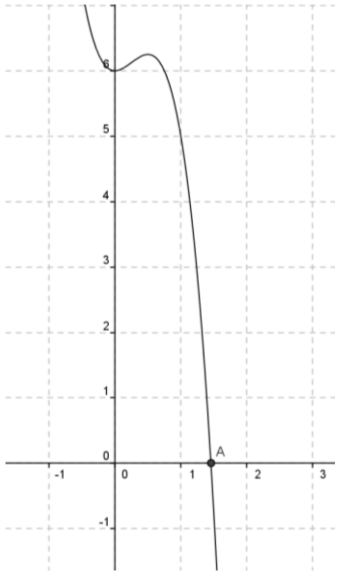
Conclusione - La funzione è strettamente decrescente in ciascuno dei due intervalli $]-\infty;-2[$, $\left]-2;\dfrac{1}{2}\right[$; è strettamente crescente nell'intervallo $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$. Il punto $x=\dfrac{1}{2}$ è di minimo relativo proprio e risulta $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Dai valori ottenuti nello studio dei limiti laterali per $x \to -2^-$ e per $x \to -2^+$ si deduce che la funzione non ammette né massimo, né minimo perché il suo codominio è illimitato superiormente e inferiormente; dunque Sup(*f*)=+∞, Inf(*f*)=-∞.

Accenno ai punti di flesso

Indichiamo l'espressione della derivata seconda senza riportare le elaborazioni algebriche necessarie per giungere alla forma finale.

Risulta: $f''(x) = \dfrac{-4x^3 + 3x^2 + 6}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (x+2)^3}$



Osserviamo che il polinomio al numeratore agli estremi dell'intervallo $\left[1; \dfrac{3}{2}\right]$ assume segno diverso, $P(1) = +5 > 0$ e $P\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{3}{4} < 0$, quindi, per il teorema di esistenza degli zeri per una funzione continua, internamente all'intervallo suddetto esiste almeno un punto x_F in cui il polinomio si annulla. Si può provare che detto punto è di flesso discendente per il grafico della funzione e che non esistono altri punti di flesso. A margine è riportato parzialmente il diagramma della funzione polinomiale $y = -4x^3 + 3x^2 + 6$.

Di seguito è riportato il diagramma della funzione irrazionale studiata e le tre rette che risultano asintoti.