

Problema¹ di Cauchy

Equazione diff. Di Bernoulli, Convergenza di Successioni e di Serie di funzioni

Dopo aver risolto il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y - y^2 \\ y(0) = \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

studiare la convergenza puntuale ed uniforme delle successioni di funzioni $(y_n(x))_{n \in N_0}$,

$(y'_n(x))_{n \in N_0}$ e la convergenza puntuale, uniforme e totale delle serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n(x)$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y'_n(x).$$

Soluzione

L'equazione differenziale da risolvere è non lineare e rientra nel tipo delle equazioni di Bernoulli:

$$y' = a(x)y + b(x) \cdot [y(x)]^\alpha;$$

la si può tuttavia risolvere agevolmente anche osservando che rientra nel tipo delle equazioni a variabili separabili, infatti si può scrivere nella seguente forma equivalente:

$$\frac{dy}{dx} = y - y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y - y^2} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y - y^2} = \int dx = x + C$$

Per quanto riguarda l'integrale indefinito al primo membro notiamo che la funzione integranda si può scrivere come la somma di due frazioni semplici

$$\frac{1}{y - y^2} = \frac{1}{y(1 - y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1 - y},$$

per cui possiamo scrivere

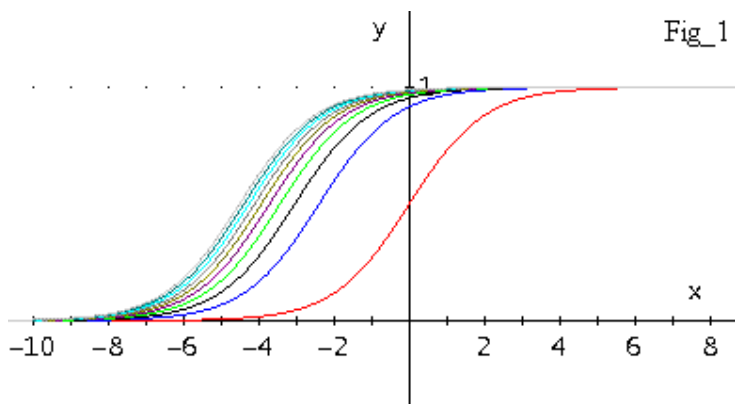
$$\int \frac{dy}{y - y^2} = \int \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{1 - y} \right] dy = \log|y| - \log|1 - y| = \log \left| \frac{y}{1 - y} \right| = x + C \Rightarrow$$

$$\left| \frac{y}{1 - y} \right| = e^{x+C} \Rightarrow \frac{y}{1 - y} = ke^x$$

, $k \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$y = \frac{ke^x}{1 + ke^x} \quad (1)$$

L'insieme delle curve descritte dalla (1) al variare del parametro k in $\mathbb{R}$ rappresenta l'integrale generale dell'equazione differenziale in esame. In Fig_1 sono rappresentate le curve corrispondenti ai valori del parametro k appartenenti all'insieme numerico



¹ Prova d'esame di matematica II/14-02-2001/Scienze Ambientali/Lecce

$\{1, 11, 21, 31, 41, \dots, 81, 91\}$. Le elaborazioni sono state ottenute velocemente con Derive².

Ricerca della soluzione del problema di Cauchy

Si deve ora determinare il valore della costante k in modo da ottenere la soluzione al problema di Cauchy in esame. A tale scopo si deve imporre che sia soddisfatta la condizione al contorno: $y(0)=1/n^2$.

$$y(0) = \frac{k}{1+k} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$

$$k = \frac{1}{n^2 - 1} \quad (2)$$

L'espressione trovata ha senso per $n \neq \pm 1$. Sostituendo nella (1) a k il valore trovato e semplificando si trova la forma analitica

$$y_n(x) = \frac{e^x}{e^x + n^2 - 1}, \text{ con } n \in \{2; 3; 4; 5; \dots\}.$$

Utilizzando l'applicazione Derive, generiamo le forme analitiche delle soluzioni $y_{2+50k}(x)$, con $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots; 49\}$;

il comando da inserire nella riga della formula è il seguente

VECTOR($y - \exp(x)/(n^2 - 1 + \exp(x)) = 0$, n , 2, 1000, 50)

Parametro

Valore iniziale del parametro.

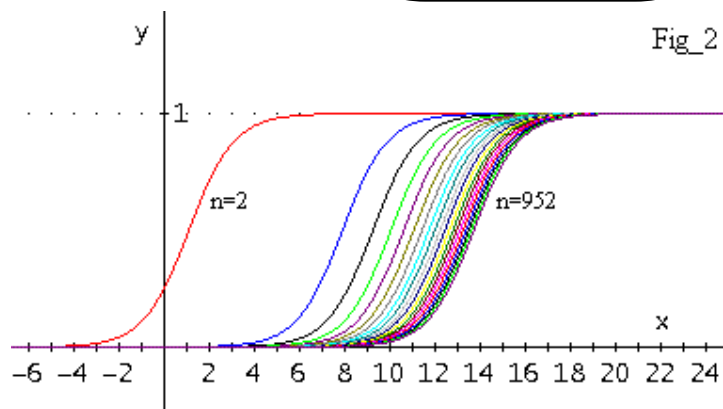
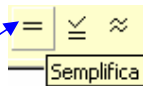
Incremento del parametro.

Valore dell'estremo superiore del parametro.

e premendo il tasto

per la semplificazione

Le curve sono rappresentate in Fig_2



Studio delle successioni

$$(y_n(x))_{n \in N_0}, (y'_n(x))_{n \in N_0}$$

Osserviamo intanto che la funzione

$y_n(x)$ è definita su tutto l'asse reale, è

continua e positiva, la sua derivata prima è $y'_n(x) = \frac{e^x(n^2 - 1)}{(e^x + n^2 - 1)^2}$. Con $n \geq 2$ risulta $y'_n(x) > 0$,

dunque la funzione è strettamente crescente;

l'estremo inferiore è $\inf(y_n(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + n^2 - 1} = 0$;

² Si è utilizzata la funzione **VECTOR** per generare automaticamente le equazioni delle dieci curve integrali. Segue la sintassi della formula:

VECTOR($y - k \cdot \exp(x)/(1 + k \cdot \exp(x)) = 0$, k , 1, 100, 10)

nella quale si indica che k deve variare da 1 a 100 con incremento 10. Il valore 100 è il valore che non sarà superato da k .

Problema di Cauchy, convergenza puntuale e uniforme di successioni e serie di funzioni.

l'estremo superiore è
$$\text{Sup}(y_n(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + n^2 - 1} = 1. \quad (3)$$

Convergenza puntuale ed uniforme della successione $(y_n(x))_{n \in N_0}$

Studiando il limite per $n \rightarrow +\infty$ del generico termine della successione si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + n^2 - 1} = 0$$

e quindi la successione converge puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$ alla funzione costante $y(x)=0$.

Vogliamo stabilire se la convergenza è anche uniforme. A tal proposito ricordiamo la definizione di convergenza uniforme.

Richiamo del concetto di convergenza uniforme di una successione di funzioni reali

Definizione- La successione $(y_n(x))_{n \in N_0}$ converge uniformemente verso la funzione $y(x)$ in un certo insieme numerico $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > v_\varepsilon \Rightarrow |y_n(x) - y(x)| < \varepsilon, \forall x \in A \quad (i)$$

Per verificare se una successione di funzioni converge uniformemente si può sfruttare una delle due seguenti condizioni equivalenti alla (i).

Forma_1

$(y_n(x))_{n \in N_0}$ converge uniformemente verso la funzione $y(x)$ nell'insieme numerico $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se sussiste la seguente proposizione

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > v_\varepsilon \Rightarrow \text{Sup}\{|y_n(x) - y(x)|, x \in A\} < \varepsilon \quad (ii)$$

Forma_2

$(y_n(x))_{n \in N_0}$ converge uniformemente verso la funzione $y(x)$ nell'insieme numerico $A \subseteq \mathbb{R}$ se si verifica il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Sup}\{|y_n(x) - y(x)|, x \in A\} = 0 \quad (iii)$$

Osservazione

E' bene osservare che la proposizione (ii) è l'esplicitazione dell'uguaglianza (iii).

Ciò premesso, visto che la successione di funzioni $(y_n(x))_{n \in N_0}$ converge puntualmente verso la funzione costante $y(x)=0$, notiamo subito che

$$\text{Sup}\{|y_n(x) - y(x)|, x \in \mathbb{R}\} = \text{Sup}\{y_n(x), x \in \mathbb{R}\} = 1$$

e quindi che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Sup}\{|y_n(x) - y(x)|, x \in \mathbb{R}\} = 1$$

Dunque non è soddisfatta la (iii). La convergenza della successione è perciò solo puntuale, non uniforme, su tutto l'asse reale.

Studio della convergenza della successione derivata $(y'_n(x))_{n \in N_0}$.

Con $n \geq 2$ la funzione è strettamente positiva. Inoltre, anche in questo caso notiamo che la successione converge puntualmente su tutto l'asse reale alla funzione costante $y(x)=0$ perché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y'_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^x (n^2 - 1)}{(e^x + n^2 - 1)^2} = 0$$

Comportamento della funzione $y'_n(x)$ agli estremi del dominio.

Risulta

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x (n^2 - 1)}{(e^x + n^2 - 1)^2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (n^2 - 1)}{(e^x + n^2 - 1)^2} = 0$$

Inoltre, determinando la derivata prima, cioè $y''_n(x)$, si ha

$$y''_n(x) = \frac{(n^2 - 1)e^x (n^2 - 1 - e^x)}{(e^x + n^2 - 1)^3};$$

con $n \geq 2$, essendo

$$n^2 - 1 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \log(n^2 - 1)$$

si deduce che il punto $x = \log(n^2 - 1)$ è di massimo assoluto per la funzione $y'_n(x)$ e risulta

$$y'_n(\log(n^2 - 1)) = \frac{e^{\log(n^2 - 1)} (n^2 - 1)}{(e^{\log(n^2 - 1)} + n^2 - 1)^2} = \frac{(n^2 - 1) \cdot (n^2 - 1)}{[(n^2 - 1) + (n^2 - 1)]^2} = \frac{1}{4}$$

A questo punto possiamo affermare che

$$\text{Sup}\{|y'_n(x) - y(x)|, x \in \mathbb{R}\} = \text{Max}(y'_n(x)) = \frac{1}{4}$$

e dunque che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Sup}\{|y'_n(x) - y(x)|, x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{4}$$

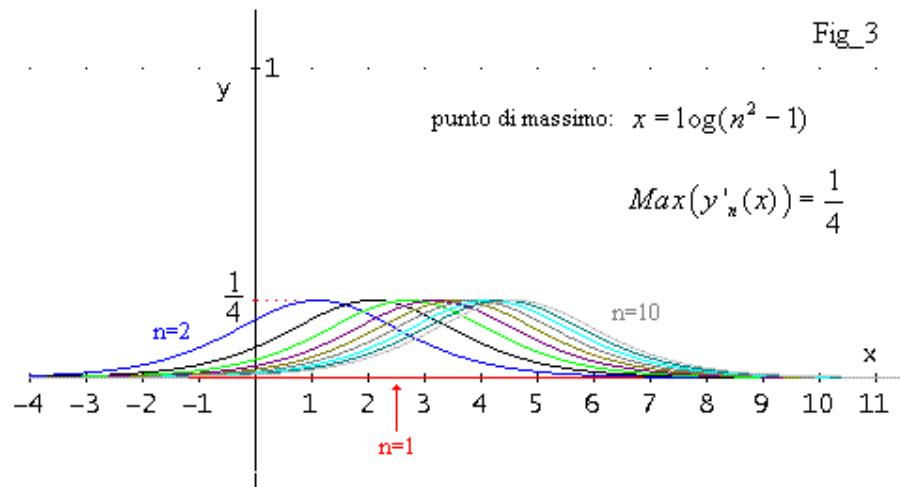
Non è perciò verificata l'uguaglianza (iii) e quindi **la successione $(y'_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge solo puntualmente alla funzione costante $y(x)=0$.**

In fig_3 sono rappresentati i diagrammi delle funzioni $y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_{10}(x)$.

I grafici sono stati ottenuti con Derive, sfruttando il comando

VECTOR(y - exp(x)·(n^2 - 1)/(exp(x) + n^2 - 1)^2 = 0, n, 1, 10)

per generare le dieci espressioni analitiche delle funzioni.



Studio della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n(x)$

Il generico termine $y_n(x) = \frac{e^x}{e^x + n^2 - 1}$ della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^x}{e^x + n^2 - 1}$ è una funzione positiva

e strettamente crescente. Pertanto se restringiamo la funzione all'intervallo $[-a; a]$, con $a > 0$, possiamo affermare che il minimo assoluto è assunto nell'estremo $x = -a$ ed il massimo assoluto è assunto nell'estremo $x = a$ e risulta:

$$\text{Max}(y_n(x)) = \frac{e^a}{e^a + n^2 - 1}$$

E' verificata perciò la disuguaglianza

$$|y_n(x)| \leq \frac{e^a}{e^a + n^2 - 1}, \forall x \in [-a; a]$$

Ne segue che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n(x)$ è maggiorata (ovviamente, assolutamente e

semplicemente) dalla serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^a}{e^a + n^2 - 1}$ nell'intervallo $[-a; a]$. Questa serie numerica

ha lo stesso carattere delle serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Ciò si riconosce applicando il criterio del confronto asintotico (di Gauss). Infatti si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^a}{e^a + n^2 - 1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^a}{e^a + n^2 - 1} \cdot n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^a \cancel{n^2}}{\cancel{n^2} \left(\frac{e^a}{n^2} + 1 - \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{e^a}{0 + 1 - 0} = e^a \in \mathbb{R}$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente sarà convergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^a}{e^a + n^2 - 1}$ e dunque la serie di funzioni è maggiorata assolutamente da una serie numerica convergente e perciò converge totalmente, nonché uniformemente in $[-a; a]$.

Studio della serie derivata $\sum_{n=1}^{+\infty} y'_n(x)$

La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^x (n^2 - 1)}{(e^x + n^2 - 1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ha lo stesso carattere della serie numerica

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, dunque è convergente puntualmente su tutto l'asse reale.

Occupandoci della successione delle derivate $(y'_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ abbiamo visto che il generico termine

$y'_n(x)$ assume il suo massimo assoluto $\frac{1}{4}$ nel punto $x = \log(n^2 - 1)$.

Problema di Cauchy, convergenza puntuale e uniforme di successioni e serie di funzioni.

Quest'informazione ci suggerisce che la serie di funzioni senz'altro non può convergere uniformemente su tutto l'asse reale perché la serie non soddisfa il criterio di Cauchy per l'uniforme convergenza che riportiamo di seguito:

Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme di una serie di funzioni

La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in $A \subseteq R$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n > \nu_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in A \Rightarrow |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad (*)$$

In relazione alla serie delle derivate riconosciamo che con $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ non è soddisfatta la disuguaglianza richiesta dal suddetto criterio di Cauchy perché scegliendo uno dei punti

$$x_1 = \log((n+1)^2 - 1), x_2 = \log((n+2)^2 - 1), \dots, x_p = \log((n+p)^2 - 1)$$

risulta

$$y'_{n+i}(x_i) = \frac{1}{4}, \text{ con } i \in \{1; 2; 3; \dots; p\} \text{ e } y'_{n+j}(x_i) > 0, \text{ con } j \neq i,$$

quindi la somma in valore assoluto è maggiore di $\frac{1}{4}$. Concludiamo che **la convergenza della serie**

$\sum_{n=1}^{+\infty} y'_n(x)$ **su tutto l'asse reale è solo puntuale.**