Facoltà di Scienze – CdL in Fisica

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA I – Parte $3^{\underline{a}}$

Prof. C. De Mitri – Lecce, 7.5.2001 –

1) Data la funzione $f(x) = \log(1+x+\alpha x^2) - \operatorname{sen} x$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, scriverne la formula di Mac-Laurin di ordine 3 e utilizzarla per calcolare il seguente limite: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\log(1+x+\alpha x^2)}\right)$

Soluzione. Ricordando che $\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(y^3)$ per $y \to 0$, si ha che:
$f(x) = [(x+\alpha x^2) - \frac{1}{2}(x+\alpha x^2)^2 + \frac{1}{3}(x+\alpha x^2)^3 + o((x+\alpha x^2)^3)] - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) =$
$= (x + \alpha x^2 - \frac{1}{2}x^2 - (\alpha - \frac{1}{3})x^3 + o(x^3)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) = (\alpha - \frac{1}{2})x^2 - (\alpha - \frac{1}{2})x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$.

Considerato che $\operatorname{sen} x \simeq x$ e $\log(1+x+\alpha x^2) \simeq x + \alpha x^2 \simeq x$ per $x \to 0$, risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\log(1+x+\alpha x^2)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x+\alpha x^2) - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x \log(1+x+\alpha x^2)} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\alpha-\frac{1}{2})x^2}{x^3} = \infty & \text{se } \alpha \neq \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0 & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Per il caso $\alpha \neq \frac{1}{2}$ si precisa che il limite proposto non esiste, dato che

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\log(1+x+\alpha x^2)}\right) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{(\alpha-\frac{1}{2})}{x} = (\alpha - \frac{1}{2})(\pm\infty) = \begin{cases} \mp\infty & \text{se } \alpha < \frac{1}{2} \\ \pm\infty & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

2) Verificare che $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\log\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$

Soluzione. Sia $f(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.
Si calcola $f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$, cosicché f è strett/te decrescente in $\mathbb{R}^+$. Inoltre risulta $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Pertanto, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ si ha che $f(x) > 0$, essendo $f(x) > \inf\limits_{x>0} f(x)$ e $\inf\limits_{x>0} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Si consideri la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

a) Usando la formula di Taylor verificare che la serie converge.
b) Dire, giustificando la risposta, se sono soddisfatte le ipotesi del criterio di Leibniz.
c) Dire se la serie converge assolutamente.

Soluzione. (a) Posto $b_n = 1 - n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, si ha che $b_n = 1 - n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ per $n \to +\infty$, e dunque $a_n = (-1)^n b_n = \frac{(-1)^n}{2n} - \frac{(-1)^n}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ per $n \to +\infty$.
La serie data converge dato che convergono le serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2}$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} o(\frac{1}{n^2})$.

(b) Si ha che $b_n > 0 \Leftrightarrow \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$, e questa disuguaglianza è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.
Pertanto la serie data è a termini di segno alterno. Del resto, il fatto che la successione $(a_n)_n$ è definit/te a termini di segno alterno poteva essere dedotto dalla relazione $a_n \simeq \frac{(-1)^n}{2n}$ per $n \to +\infty$.
Da $b_n = |a_n| \simeq \frac{1}{2n}$ per $n \to +\infty$ segue che $(b_n)_n$ è inf/ma.
Quanto alla decrescenza di $(b_n)_n$, posto $f(x) = 1 - x\log(1+\frac{1}{x})$, $x \geq 1$, si calcola $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \log(1+\frac{1}{x})$, ed è noto dal quesito (2) che $f'(x) < 0$ $\forall x \geq 1$. Del resto $b_n = 1 - \log(1+\frac{1}{n})^n$ è decrescente perché, come è noto, $(1+\frac{1}{n})^n$ è crescente.
(c) Da $a_n \simeq \frac{(-1)^n}{2n}$ per $n \to +\infty$ segue che $|a_n| \simeq \frac{1}{2n}$ per $n \to +\infty$, e pertanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

4) Studiare e rappresentare graficamente la funzione definita da

$f(x) \;=\; \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - (\sqrt{|x|}+1)\, e^{-\sqrt{|x|}}\,.$

Soluzione.

-) $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$.

-) $f(0) = -\frac{1}{2}$.

-) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (si è tenuto conto del fatto che $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{|x|}\, e^{-\sqrt{|x|}} = \lim\limits_{y\to+\infty} y\, e^{-y} = 0\,$);

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (\frac{1}{4} + \frac{1}{2x} - \frac{\sqrt{|x|}+1}{x} e^{-\sqrt{|x|}}) = \frac{1}{4}\,$;

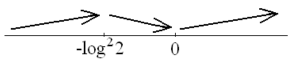
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - \frac{1}{4}x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (\frac{1}{2} - (\sqrt{|x|}+1)e^{-\sqrt{|x|}}) = \frac{1}{2}\,.$

Pertanto la retta $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

-) $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-x}} & \text{se } x<0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{x}} & \text{se } x>0 \end{cases}\,.$

Inoltre $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{1}{4}$ e $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{3}{4}$, cosicché $(0,-\frac{1}{2})$ è punto angoloso.

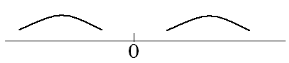
-) Dallo studio del segno di $f'(x)$ si deduce che f è strett/te crescente in $(-\infty, -\log^2 2]$ ed in $[0,+\infty)$, ed è strett/te decrescente in $[-\log^2 2, 0]$.



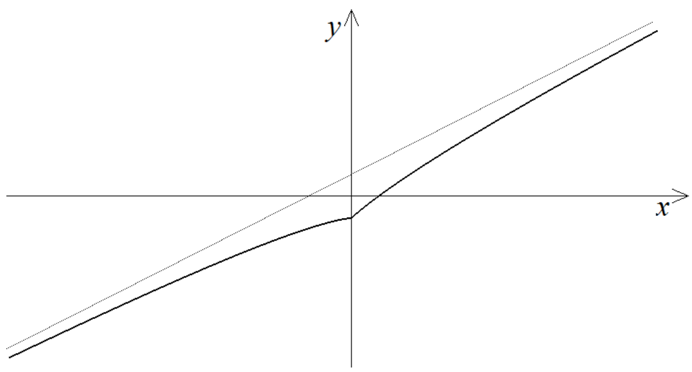
Il punto $-\log^2 2$ ($\simeq -0,48$) è di massimo relativo proprio; $f(-\log^2 2) =$
$= -\frac{1}{4}\log^2 2 - \frac{1}{2}\log 2$ ($\simeq -0,47$). Il punto 0 è di minimo relativo proprio; $f(0) = -\frac{1}{2}$.

-) $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{|x|}} e^{-\sqrt{|x|}}\,.$

-) Dallo studio del segno di $f''(x)$ si deduce che f è strett/te concava in $(-\infty, 0]$ ed in $[0,+\infty)$.



-) Pertanto il grafico di f è quello illustrato qui di seguito.



5) Discutere e calcolare il seguente integrale: $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x-1}}{x^2}\, dx$

Soluzione. $f \in C^0((1,+\infty))$.

Per $x \to 1^+$ $f(x) \to \frac{\pi}{2}$: f è limitata intorno a 1 e quindi è integrabile in $(1,c]$ $\forall\, c > 1$.

Per $x \to +\infty$ $f(x) \simeq \frac{1}{x^3}$: f è inf/ma di ordine 3 per $x \to +\infty$ e quindi è integrabile in $[c,+\infty)$ $\forall\, c > 1$.

Pertanto l'integrale assegnato converge.

Calcoliamo l'integrale indefinito: $\int \frac{\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x-1}}{x^2}\, \mathrm{d}x \;=\; -\int \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x-1}\, \mathrm{d}\frac{1}{x} \;=\; -\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x-1} - \int \frac{1}{x(x^2-2x+2)}\, \mathrm{d}x \;=$
$-\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x-1} - \int (\frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-2x+2})\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\log\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(x-1) + c.$

Infine: $\int_h^k \frac{\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x-1}}{x^2}\, \mathrm{d}x \;=\; -\frac{1}{k}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\log\frac{k}{\sqrt{k^2-2k+2}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(k-1) \;+\; \frac{1}{h}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{h-1} + \frac{1}{2}\log\frac{h}{\sqrt{h^2-2h+2}} +$
$\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(h-1) \;\xrightarrow[h\to 1^+]{}\; -\frac{1}{k}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\log\frac{k}{\sqrt{k^2-2k+2}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(k-1) + \frac{\pi}{2} \;\xrightarrow[k\to+\infty]{}\; -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$