Applicazione del concetto di ricorrenza

(Calcolo di radici quadrate)

Approssimare il valore delle radici quadrate dei numeri $A, \frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{4}, \ldots, \frac{A}{k-1}$, essendo A un numero qualsiasi positivo e k naturale maggiore o uguale a due.

Basta costruire la successione per ricorrenza definita nel modo che segue.

- Per il calcolo di $\sqrt{A}$ la definizione del termine generale della successione è

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}}\right). \qquad (1)$$

Come punto iniziale x_1 si può scegliere un qualsiasi numero positivo.
Per dimostrare l'affermazione si suppone che la successione converga ad un valore l e si osserva che il valore del limite del primo membro della (1) deve essere uguale al valore del limite del secondo membro. Imponendo l'uguaglianza si ricava un'equazione dalla quale si ottiene il risultato.

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l \;, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{A}{l}\right) \Rightarrow l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{A}{l}\right) \Rightarrow 2l^2 = l^2 + A \Rightarrow$$

$$l^2 = A \Rightarrow l = \sqrt{A}$$

- Per il calcolo di $\sqrt{\frac{A}{2}}$ si segue lo stesso procedimento; la formula di ricorrenza è

$$x_n = \frac{1}{3}\left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}}\right) \qquad (2)$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l; \; \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}}\right) = \frac{1}{3}\left(l + \frac{A}{l}\right) \Rightarrow$$

$$l = \frac{1}{3}\left(l + \frac{A}{l}\right) \Rightarrow 3l^2 = l^2 + A \Rightarrow$$

$$2l^2 = A \Rightarrow l = \sqrt{\frac{A}{2}}$$

- Per il caso generale $\sqrt{\frac{A}{k-1}}$ il procedimento è analogo.

$$x_n = \frac{1}{k}\left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}}\right) \qquad (3)$$

$$l = \frac{1}{k}\left(l + \frac{A}{l}\right) \Rightarrow kl^2 = l^2 + A \Rightarrow (k-1)l^2 = A \Rightarrow$$

$$l = \sqrt{\frac{A}{k-1}}$$

Un aiuto da Excel per ottenere delle approssimazioni veloci. Nella tabella a lato sono riportate alcune elaborazioni per il calcolo della radice quadrata di 3.
[Apri il foglio excel]

$$\boxed{x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{3}{x_{n-1}}\right)}$$

N	Xn-1	Xn
0	2	1,75
1	1,75	1,732142857
2	1,73214286	1,73205081
3	1,73205081	1,732050808
4	1,73205081	1,732050808
5	1,73205081	1,732050808
6	1,73205081	1,732050808
7	1,73205081	1,732050808
8	1,73205081	1,732050808
9	1,73205081	1,732050808
10	1,73205081	1,732050808
11	1,73205081	1,732050808
12	1,73205081	1,732050808
13	1,73205081	1,732050808
14	1,73205081	1,732050808
15	1,73205081	1,732050808
16	1,73205081	1,732050808
17	1,73205081	1,732050808
18	1,73205081	1,732050808
19	1,73205081	1,732050808

Luigi Lecci:www.matematicaescuola.it