Serie numerica telescopica

Studiare la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} ln\left(\frac{1+e^{-n}}{1+e^{-n-1}}\right)$ precisandone il carattere ed in caso converga trovare la sua somma.

Elaborazioni

1. Proviamo che Si tratta di una serie a termini positivi. Dimostriamo che $\forall n \in N_0$ è soddisfatta la disuguaglianza $\frac{1+e^{-n}}{1+e^{-n-1}}>1$, equivalente alla disuguaglianza $1+e^{-n}>1+e^{-n-1}$, che si riduce alla disuguaglianza $e^{-n}>e^{-(n+1)}$, che è vera poiché -n >-(n+1) e la funzione esponenziale e^x è strettamente crescente. Pertanto la serie in oggetto è regolare, sarà convergente o divergente positivamente.
2. Vediamo se è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=0$.

   $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} ln\left(\frac{1+e^{-n}}{1+e^{-n-1}}\right) = ln\left(\frac{1+e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}}\right) = ln\left(\frac{1+0}{1+0}\right) = ln(1)=0$$

   La condizione per la convergenza è soddisfatta.
3. Scriviamo ora l'espressione della ridotta n-esima.

   $$S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n = \left[\ln\left(1+e^{-1}\right)-\cancel{\ln\left(1+e^{-2}\right)}\right]+\left[\cancel{\ln\left(1+e^{-2}\right)}-\cancel{\ln\left(1+e^{-3}\right)}\right]+$$
   $$\left[\cancel{\ln\left(1+e^{-3}\right)}-\ln\left(1+e^{-4}\right)\right]+\ldots+\left[\ln\left(1+e^{-n+1}\right)-\cancel{\ln\left(1+e^{-n}\right)}\right]+\left[\cancel{\ln\left(1+e^{-n}\right)}-\ln\left(1+e^{-n-1}\right)\right]=$$
   $$\ln\left(1+e^{-1}\right)-\ln\left(1+e^{-n-1}\right)$$

   Passando allo studio del limite della ridotta n-esima si ha

   $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+e^{-1}\right)-\ln\left(1+e^{-n-1}\right) = \ln\left(1+e^{-1}\right)-\ln(1+0) = \ln\left(1+e^{-1}\right)$$

   Il valore ottenuto rappresenta la somma della serie in oggetto.