Sulle serie numeriche

Serie a termini a segno alterno

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2+1}{9^n\cdot n^3}\cdot(2x-1)^{2n}$, al variare di x in R.

Elaborazioni

1) Si riconosce che la serie ha i termini con segno alterno. Affrontiamo lo studio con il criterio della radice (di Cauchy). Studiamo dunque il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+1}{9^n\cdot n^3}\cdot(2x-1)^{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2x-1)^2}{9}\cdot\sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n^3}}=\frac{(2x-1)^2}{9}\cdot\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n^3}}$$

Il limite residuo, scrivendolo nella forma $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{n}}$ si riconosce che si presenta nella forma indeterminata 0^0. Lo affrontiamo passando al continuo e trasformandolo nella forma esponenziale-logaritmica. Precisamente scriviamo

$$\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^3}\right)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to+\infty}e^{ln\left(\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^3}\right)^{\frac{1}{y}}\right)}=\lim_{y\to+\infty}e^{\frac{1}{y}\cdot ln\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^3}\right)}=\lim_{y\to+\infty}e^{\frac{ln\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^3}\right)}{y}}\qquad(*)$$

Occupiamoci dello studio del limite della funzione che figura all'esponente.

$\lim_{y\to+\infty}\frac{ln\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^3}\right)}{y}=\frac{ln\left(0^+\right)}{+\infty}=\frac{-\infty}{+\infty}$, abbiamo una forma indeterminata che può essere affrontata con la regola di de l'Hôpital. Quindi

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{ln\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^3}\right)}{y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{ln\left(y^{-1}+y^{-3}\right)}{y}\overset{H.}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{1}{y^{-1}+y^{-3}}\left(-1y^{-2}-3y^{-4}\right)}{1}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{y^3}}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}-\frac{3}{y^4}\right)=$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y^3}{y^2+1}\cdot\left(-\frac{y^2+3}{y^4}\right)==\lim_{y\to+\infty}\left[-\frac{y^2+3}{y\left(y^2+1\right)}\right]=\ldots=0$$

Pertanto per il limite (*) risulta $\lim_{y\to+\infty}e^{\frac{ln\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^3}\right)}{y}}=e^0=1$.

Si conclude che

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{(2x-1)^2}{9}\cdot\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n^3}}=\frac{(2x-1)^2}{9}\cdot1=\frac{(2x-1)^2}{9}$$

Ebbene,

- per i valori di x che soddisfano la doppia disuguaglianza

  $0 \le \frac{(2x-1)^2}{9} < 1$, quindi per $(2x-1)^2 < 9$, equivalente a alla seguente doppia disuguaglianza

  $-3 < 2x-1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2$, la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente;

- per i valori (x <-1)$\vee$(x>2) la serie non converge ed avendo i termini con segno alterno sarà indeterminata;
- per i valori x =-1 ed x=-2 facciamo lo studio particolare.
  Con x =-1 la serie diventa

  $$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{n^2+1}{9^n \cdot n^3} \cdot (-3)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{n^2+1}{\cancel{9^n} \cdot n^3} \cdot \cancel{9^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{n^2+1}{n^3}.$$

  La serie verifica le ipotesi del criterio di Leibniz. Infatti $\left|(-1)^n \cdot \frac{n^2+1}{n^3}\right| = \frac{n^2+1}{n^3}$ per n$\to$+∞ decresce ed è infinitesimo. Quindi la serie in oggetto è convergente.

  Con x =2 si ottiene la stessa serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{n^2+1}{9^n \cdot n^3} \cdot (3)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{n^2+1}{n^3}$.

  Pertanto possiamo concludere che:
  per -1<x<2 la serie converge assolutamente e semplicemente;
  per (x =-1)$\vee$(x=2) la serie converge semplicemente;
  per (x <-1)$\vee$(x>2) la serie è indeterminata.