Sulle serie numeriche

Serie a termini positivi studiata con il criterio del rapporto

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{nx^2}}{e^{4n}}$, al variare di x in R.

Elaborazioni

1) La serie in oggetto è a termini positivi, dunque è regolare e può convergere o divergere a +∝.

2) Affrontiamo lo studio della serie applicando il criterio del rapporto.

Si deve studiare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{(n+1)x^2}}{e^{4(n+1)}}:\frac{e^{nx^2}}{e^{4n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{e^4} = \frac{e^{x^2}}{e^4}$$

In virtù del criterio del rapporto

a) per i valori di x che verificano la doppia disuguaglianza $0 \le \frac{e^{x^2}}{e^4} < 1$ la serie converge;

b) per i valori che verificano la disuguaglianza $\frac{e^{x^2}}{e^4} > 1$ la serie non converge, e poiché abbiamo precisato che la serie è regolale, essendo a termini positivi divergerà positivamente;

c) per i valori che verificano l'uguaglianza $\frac{e^{x^2}}{e^4} = 1$ si deve effettuare uno studio specifico caso per caso.

Ebbene, risulta $0 \le \frac{e^{x^2}}{e^4} < 1 \Leftrightarrow 0 \le e^{x^2} < e^4 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow (x < -2) \vee (x > 2)$

Dunque la serie converge $\forall x \in$]-2;2[e diverge positivamente per $x \in$]-∝;-2[∪]2;+∝[.

Ne due casi particolari x=-2, x=2 la serie numerica ha il termine generale che è costante e vale 1, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{4n}}{e^{4n}} = \sum_{n=0}^{+\infty}1$, quindi diverge positivamente.