Sulle serie numeriche

Serie studiata con il criterio de confronto asintotico

Studiare il carattere della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)$.

Elaborazioni

1) Osserviamo che la serie è a termini positivi perché $\sqrt{4n^2+3}>2n$ ∀n∈N, dunque è regolare e può convergere o divergere a +∝.

2) Studiamo il limite per n→+∝ del termine generale della serie.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(2n\sqrt{1+\frac{3}{4n^2}}-2n\right)==\lim_{n\to+\infty}2n\left(\sqrt{1+\frac{3}{4n^2}}-1\right)=+\infty\cdot 0$$ La forma è indeterminata.

Procediamo come segue

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)\cdot\frac{\sqrt{4n^2+3}+2n}{\sqrt{4n^2+3}+2n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2+3}\right)^2-4n^2}{\sqrt{4n^2+3}+2n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{4n^2+3}+2n}=0$$

Il termine generale della serie è infinitesimo per n→+∝.

Evidentemente la serie in esame può essere scritta nella forma seguente $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{\sqrt{4n^2+3}+2n}$. Vogliamo provare che ha lo stesso carattere della serie armonica fondamentale $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, che com'è noto diverge positivamente, utilizzando il criterio del confronto asintotico. Infatti il limite del rapporto dei rispettivi termini generali è

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3}{\sqrt{4n^2+3}+2n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{4n^2+3}+2n}\cdot n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{4n^2}}+1\right)}\cdot\cancel{n}=\frac{3}{4}$$

Avendo ottenuto come limite un numero reale diverso da zero in virtù del criterio del confronto asintotico le due serie hanno lo stesso carattere e quindi la serie numerica in oggetto diverge positivamente.