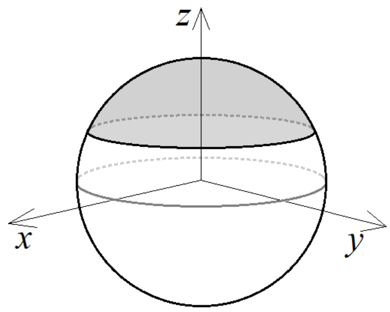
VOLUME DEL SEGMENTO SFERICO AD UNA BASE

– Cosimo De Mitri –



•) Calcoliamo il volume dell'insieme

$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \, x^2+y^2+z^2 \leq 1 \, , \, z \geq \frac{1}{2}\}.$

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

1. L'insieme E è normale rispetto al piano xy.

L'insieme E può essere descritto nella forma

$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \, (x,y)\in B \, , \, \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\} \, ,$

ove si assuma $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \, x^2+y^2 \leq \frac{3}{4}\}$, $\alpha(x,y) = \frac{1}{2}$ e $\beta(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Da notare che la relazione $x^2+y^2 \leq \frac{3}{4}$ è stata ottenuta imponendo che $\alpha(x,y) \leq \beta(x,y)$.

Pertanto si calcola:

$$\mathcal{V}(E) = \iiint_E \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{1/2}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}z = \iint_B \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \tfrac{1}{2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_B \sqrt{1-x^2-y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \tfrac{1}{2}\mathcal{A}(B) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho - \tfrac{3}{8}\pi = \ldots = \tfrac{7}{12}\pi - \tfrac{3}{8}\pi = \tfrac{5}{24}\pi,$$

dove l'integrale sul cerchio B è stato calcolato usando per B le condizioni polari $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ e $0 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, e si è indicata con $\mathcal{A}(B)$ l'area di B.

2. L'insieme E è normale rispetto all'asse z.

L'insieme E può essere descritto nella forma

$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \, a \leq z \leq b \, , \, (x,y)\in S_z\} \, ,$

ove si assuma $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ e $S_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \, x^2+y^2 \leq 1-z^2\}$.

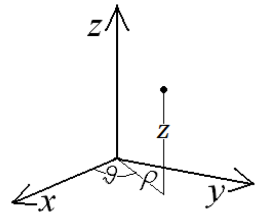
Da notare che la relazione $z \leq 1$ è stata ottenuta imponendo la condizione di compatibilità alla disequazione $x^2+y^2 \leq 1-z^2$.

Pertanto si calcola:

$$\mathcal{V}(E) = \iiint_E \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{1/2}^1 \mathrm{d}z \iint_{S_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{1/2}^1 \mathcal{A}(S_z)\,\mathrm{d}z = \pi \int_{1/2}^1 (1-z^2)\,\mathrm{d}z = \ldots = \tfrac{5}{24}\pi,$$

dove si è indicata con $\mathcal{A}(S_z)$ l'area del cerchio S_z.

3. Uso delle coordinate cilindriche.



Consideriamo la trasformazione

$$\phi \equiv \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = z \end{cases}, \text{ con } \begin{cases} \rho \ge 0 \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{cases},$$

per la quale è noto che $J\phi(\rho, \vartheta, z) = \rho$.

Le condizioni $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \\ z \ge \frac{1}{2} \end{cases}$ si tramutano in $\begin{cases} \rho^2 + z^2 \le 1 \\ z \ge \frac{1}{2} \end{cases}$, cosicché, posto

$F = \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 / \rho^2 + z^2 \le 1\,,\ z \ge \frac{1}{2}\}$,

si ha che $\phi(E) = F$ e $\iiint_E \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_F \rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}z$.

La disequazione $\rho^2 + z^2 \le 1$ può essere risolta sia rispetto a ρ sia rispetto a z, e pertanto il calcolo dell'integrale su F può essere effettutato nei due modi che seguono.

3a) Risoluzione rispetto a ρ.

L'insieme F si può riscrivere nella forma

$F = \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \le \vartheta \le 2\pi\,,\ \frac{1}{2} \le z \le 1\,,\ 0 \le \rho \le \sqrt{1 - z^2}\}$,

dove la relazione $z \le 1$ è stata ottenuta imponendo la condizione di compatibilità alla disequazione $\rho^2 \le 1 - z^2$.

Pertanto si calcola:

$\iiint_F \rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \rho\,\mathrm{d}\rho = \ldots = \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - z^2)\,\mathrm{d}z = \ldots = \frac{5}{24}\pi.$

3b) Risoluzione rispetto a z.

L'insieme F si può riscrivere nella forma

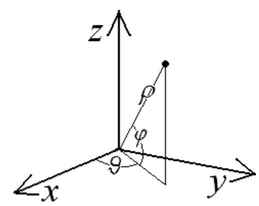
$F = \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \le \vartheta \le 2\pi\,,\ 0 \le \rho \le \frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ \frac{1}{2} \le z \le \sqrt{1 - \rho^2}\}$,

dove la relazione $\rho \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ è stata ottenuta imponendo la condizione $\sqrt{1 - \rho^2} \ge \frac{1}{2}$.

Pertanto si calcola:

$\iiint_F \rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_0^{\sqrt{3}/2} \rho\,\mathrm{d}\rho \int_{1/2}^{\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{d}z = \ldots = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} (\sqrt{1 - \rho^2} - \frac{1}{2})\,\rho\,\mathrm{d}\rho = \ldots = \frac{5}{24}\pi.$

4. Uso delle coordinate sferiche (con latitudine).



Consideriamo la trasformazione

$$\chi \equiv \begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = \rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}, \text{ con } \begin{cases} \rho \ge 0 \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \end{cases},$$

per la quale è noto che $J\chi(\rho, \varphi, \vartheta) = -\rho^2 \cos\varphi$.

Le condizioni $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \\ z \ge \frac{1}{2} \end{cases}$ si tramutano in $\begin{cases} \rho \le 1 \\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \ge \frac{1}{2} \end{cases}$, cosicché, posto

$H = \{(\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 / \rho \le 1\,,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \ge \frac{1}{2}\}$,

si ha che $\chi(E) = H$ e $\iiint_E \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_H \rho^2 \cos\varphi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta$.

La disequazione $\rho \operatorname{sen}\varphi \geq \frac{1}{2}$ può essere risolta sia rispetto a ρ sia rispetto a φ, e pertanto il calcolo dell'integrale su H può essere effettuato nei due modi che seguono.

4a) Risoluzione rispetto a ρ.

L'insieme H si può riscrivere nella forma
$H = \{(\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 / \, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \, , \, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \, , \, \frac{1}{2 \operatorname{sen}\varphi} \leq \rho \leq 1\}$,
dove la relazione $\varphi \geq \frac{\pi}{6}$ è stata ottenuta imponendo la condizione $\frac{1}{2 \operatorname{sen}\varphi} \leq 1$.

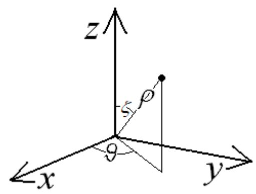
Pertanto si calcola:
$\iiint_H \rho^2 \cos\varphi \, d\rho d\varphi d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi \int_{1/(2 \operatorname{sen}\varphi)}^{1} \rho^2 \, d\rho = \ldots =$
$= \frac{2\pi}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - \frac{1}{8 \operatorname{sen}^3\varphi}) \cos\varphi \, d\varphi = \ldots = \frac{5}{24}\pi.$

4b) Risoluzione rispetto a φ.

L'insieme H si può riscrivere nella forma
$H = \{(\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 / \, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \, , \, \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1 \, , \, \operatorname{arcsen} \frac{1}{2\rho} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$,
dove la relazione $\rho \geq \frac{1}{2}$ è stata ottenuta imponendo la condizione di compatibilità alla disequazione $\operatorname{sen}\varphi \geq \frac{1}{2\rho}$.

Pertanto si calcola:
$\iiint_H \rho^2 \cos\varphi \, d\rho d\varphi d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1/2}^{1} \rho^2 d\rho \int_{\operatorname{arcsen}(1/(2\rho))}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi = \ldots =$
$= 2\pi \int_{1/2}^{1} \rho^2 (1 - \frac{1}{2\rho}) \, d\rho = \ldots = \frac{5}{24}\pi.$

5. Uso delle coordinate sferiche (con colatitudine).



Consideriamo la trasformazione
$$\psi \equiv \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\zeta \cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\zeta \operatorname{sen}\vartheta \\ z = \rho \cos\zeta \end{cases}, \text{ con } \begin{cases} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \zeta \leq \pi \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{cases},$$
per la quale è noto che $J\psi(\rho, \zeta, \vartheta) = \rho^2 \operatorname{sen}\zeta$.

Le condizioni $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ si tramutano in $\begin{cases} \rho \leq 1 \\ \rho\cos\zeta \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, cosicché, posto
$G = \{(\rho, \zeta, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 / \, \rho \leq 1 \, , \, \rho\cos\zeta \geq \frac{1}{2}\}$,
si ha che $\psi(E) = G$ e $\iiint_E dx dy dz = \iiint_G \rho^2 \operatorname{sen}\zeta \, d\rho d\zeta d\vartheta$.

La disequazione $\rho\cos\zeta \geq \frac{1}{2}$ può essere risolta sia rispetto a ρ sia rispetto a ζ, e pertanto il calcolo dell'integrale su G può essere effettuato nei due modi che seguono.

5a) Risoluzione rispetto a ρ.

L'insieme G si può riscrivere nella forma
$G = \{(\rho, \zeta, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 / \, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \, , \, 0 \leq \zeta \leq \frac{\pi}{3} \, , \, \frac{1}{2\cos\zeta} \leq \rho \leq 1\}$,
dove la relazione $\zeta \leq \frac{\pi}{3}$ è stata ottenuta imponendo la condizione $\frac{1}{2\cos\zeta} \leq 1$.

Pertanto si calcola:

$\iiint_G \rho^2 \operatorname{sen}\zeta \, d\rho d\zeta d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\zeta \, d\zeta \int_{1/(2\cos\zeta)}^{1} \rho^2 \, d\rho = \ldots =$

$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/3} (1 - \frac{1}{8\cos^3\zeta}) \operatorname{sen}\zeta \, d\zeta = \ldots = \frac{5}{24}\pi.$

5b) Risoluzione rispetto a ζ.

L'insieme G si può riscrivere nella forma

$G = \{(\rho, \zeta, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 / \, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \, , \, \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1 \, , \, 0 \leq \zeta \leq \arccos \frac{1}{2\rho}\},$

dove la relazione $\rho \geq \frac{1}{2}$ è stata ottenuta imponendo la condizione di compatibilità alla disequazione $\cos\zeta \geq \frac{1}{2\rho}$.

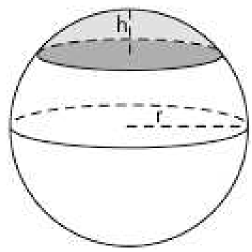
Pertanto si calcola:

$\iiint_G \rho^2 \operatorname{sen}\zeta \, d\rho d\zeta d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1/2}^{1} \rho^2 \, d\rho \int_0^{\arccos(1/(2\rho))} \operatorname{sen}\zeta \, d\zeta = \ldots =$

$= 2\pi \int_{1/2}^{1} \rho^2 (1 - \frac{1}{2\rho}) \, d\rho = \ldots = \frac{5}{24}\pi.$

•) Il risultato ottenuto è in accordo con quello che si ottiene applicando al caso specifico la nota formula per il volume del segmento sferico di altezza h ricavato nella sfera di raggio r

$$\mathcal{V} = \pi h^2 (r - \frac{h}{3})$$



•) Per ulteriori approfondimenti sugli integrali multipli, si rimanda ai testi:

1. *Appunti di Analisi Matematica III*, Cosimo De Mitri, GEDI Gruppo Editoriale S.p.A., 2019
https://ilmiolibro.kataweb.it/libro/didattica-e-dispense/216997/appunti-di-analisi-matematica-iii-3/

2. *Raccolta di Esercizi di Analisi Matematica*, Cosimo De Mitri, UniSalentoPress, II ed., 2015
https://www.unilibro.it/libri/f/autore/de_mitri_cosimo