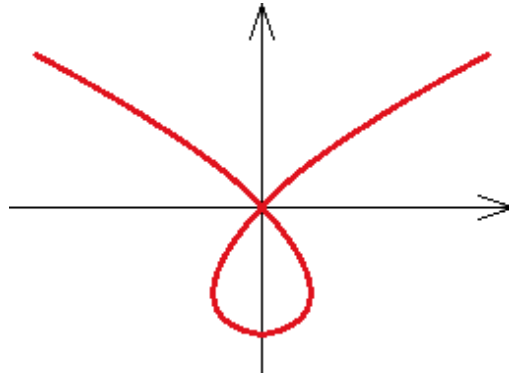
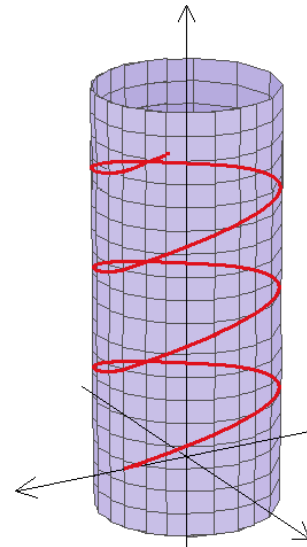


# CURVE IN $\mathbb{R}^n$

– COSIMO DE MITRI –



1. Curve in $\mathbb{R}^n$ .....	pag. 1
2. Retta tangente .....	pag. 3
3. Curve regolari .....	pag. 5
4. Lunghezza di una curva .....	pag. 7



C.d.L in Fisica  
Lecce, a.a. 2011/12

# CURVE IN $\mathbb{R}^n$

(C. DE MITRI)

## 1. Curve in $\mathbb{R}^n$

Dicesi *curva in  $\mathbb{R}^n$*  ogni applicazione continua  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dove  $I$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$ . L'insieme  $\Gamma = \varphi(I)$  è chiamato *sostegno* della curva.

Talvolta il termine curva viene riferito al luogo  $\Gamma$ , ritenendo sottinteso che sia assegnata un'applicazione  $\varphi$  di cui  $\Gamma$  è l'immagine. Tant'è che spesso si dice: la curva  $\Gamma$  di *equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases}, t \in I.$$

Si dice anche che  $\varphi \equiv (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$  è una *rappresentazione parametrica* di  $\Gamma$ , e la variabile  $t$  è chiamata *parametro*.

In cinematica capita molto spesso che il parametro  $t$  rappresenti il tempo e che il punto di  $\mathbb{R}^3$   $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$  (oppure il punto di  $\mathbb{R}^2$   $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ ) rappresenti la posizione occupata nello spazio (o rispettivamente nel piano) da una data particella all'istante  $t$ . In questo caso l'equazione  $r = \varphi(t)$ ,  $t \in I$ , è chiamata *equazione oraria* del moto della particella, del quale moto il sostegno  $\Gamma = \varphi(I)$  rappresenta la *traiettoria*.

Nel caso che  $I$  sia chiuso e limitato,  $I = [a, b]$ , i punti  $\varphi(a)$  e  $\varphi(b)$  sono detti *estremi*, rispettivamente *primo* e *secondo*, della curva. Inoltre la curva  $\varphi^{\leftarrow} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita da  $\varphi^{\leftarrow}(t) = \varphi(a+b-t)$  è detta *inversa* di  $\varphi$ . Si riconosce facilmente che la curva inversa  $\varphi^{\leftarrow}$  conserva il sostegno della  $\varphi$ , ma scambia l'ordine degli estremi.

Nel caso  $I = [a, b]$ , se gli estremi  $\varphi(a)$  e  $\varphi(b)$  coincidono, si dice che la curva è *chiusa*. In tutti gli altri casi si dice che la curva è *aperta*.

La curva  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice *semplice* se, comunque si prendano  $t_1, t_2 \in I$ , distinti e di cui uno almeno interno ad  $I$ , si ha che  $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ . Se  $P (\in \Gamma)$  è tale che l'insieme  $\{t \in I / \varphi(t) = P\}$  sia formato da almeno due valori distinti di  $t$  di cui uno almeno interno ad  $I$ , si dice che  $P$  è un punto *multiplo* della curva  $\varphi$ . I punti che non sono multipli si dicono *semplici*.

Se  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una curva semplice, sul suo sostegno  $\Gamma$  resta fissato un *verso di percorrenza*, cioè una relazione che ne ordina i punti, definita così: presi  $P_1 = \varphi(t_1)$  e  $P_2 = \varphi(t_2)$ , con  $t_1, t_2 \in I$ , ed anzi  $t_1$  e  $t_2$  interni ad  $I$  se  $I = [a, b]$  e  $\varphi$  è chiusa, diciamo che  $P_1$  *precede*  $P_2$  (rispetto a  $\varphi$ ) se  $t_1 < t_2$ . Se la curva non è semplice, i punti del sostegno possono essere orientati con lo stesso criterio, ma soltanto quelli semplici. Si dice che questa *orientazione* è *indotta* su  $\Gamma$  da  $\varphi$ , ed è chiamata anche *delle  $t$  crescenti*, se  $t$  è la lettera usata per indicare il parametro. Se  $I = [a, b]$ , la curva inversa  $\varphi^{\leftarrow}$  induce su  $\Gamma$  l'orientazione opposta.

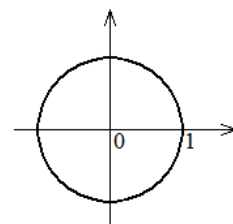
Le curve semplici e chiuse di  $\mathbb{R}^2$  sono dette anche *curve di Jordan*.

Il *Teorema di Jordan* stabilisce che il sostegno di una qualsiasi curva di  $\mathbb{R}^2$  semplice e chiusa è la *frontiera* di due aperti, uno limitato (detto *interno alla curva*) e l'altro illimitato (detto *esterno alla curva*).

**Esempio 1.1.** Consideriamo le curve

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi], \quad \psi \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, 3\pi],$$

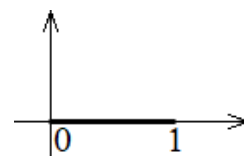
$$\chi \equiv \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}, t \in [0, \pi], \quad \zeta \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = -\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$



Esse hanno tutte lo stesso sostegno, che è la circonferenza di centro  $(0, 0)$  e raggio 1. Usando il linguaggio della cinematica, diremmo che, al variare di  $t$  nel relativo intervallo di tempo: il punto  $\varphi(t)$  descrive la circonferenza una sola volta, in senso antiorario, partendo dalla posizione  $(1, 0)$  e tornando nella medesima posizione; il punto  $\chi(t)$  compie il medesimo percorso nel medesimo verso, ma procede con “velocità” doppia; il punto  $\psi(t)$  compie un giro e mezzo, fermandosi nella posizione  $(-1, 0)$ ; infine il punto  $\zeta(t)$  procede come il punto  $\varphi(t)$ , con l’unica differenza che il verso di percorrenza è quello orario. E’ facile riconoscere che  $\zeta = \varphi^{\leftarrow}$ . La curva  $\psi$  è aperta e non è semplice, mentre tutte le altre sono chiuse e semplici.

**Esempio 1.2.** La curva  $\varphi \equiv (t, 0)$ ,  $t \in [0, 1]$ , è semplice ed aperta, e ha per sostegno il segmento di estremi  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ . Stesso sostegno hanno le curve  $\psi \equiv (\sin \pi t, 0)$ ,  $t \in [0, 1]$ , e  $\chi \equiv (x(t), 0)$ ,  $t \in [0, 1]$ , dove

$x(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2-2t & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$ . Queste sono entrambe chiuse e non sono semplici: ciascuno dei punti  $\psi(t)$  e  $\chi(t)$  percorre il segmento due volte, prima da sinistra a destra e poi viceversa.

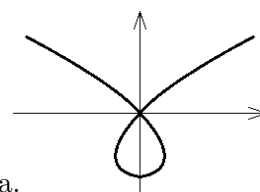


**Esempio 1.3.** La curva  $\varphi \equiv \begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è chiamata *strofoide*.

Essa non è semplice, per via del suo (unico) punto multiplo, doppio per l’esattezza,  $(0, 0) = \varphi(1) = \varphi(-1)$ .

Non è semplice neanche la sua restrizione all’intervallo  $[-1, +\infty[$ .

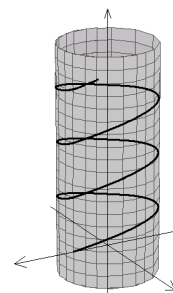
Invece la restrizione di  $\varphi$  all’intervallo  $[-1, 1]$  è una curva semplice e chiusa.



**Esempio 1.4.** Dati  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , la curva

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

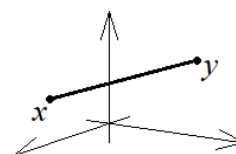
è detta *elica cilindrica*. Il suo sostegno vive sulla superficie cilindrica di equazione  $x^2 + y^2 = a^2$ ; il punto  $\varphi(t)$ , dopo aver percorso un giro completo attorno al cilindro, si ritrova sollevato di una lunghezza pari a  $2\pi b$ , che prende il nome di *passo* dell’elica.



**Esempio 1.5.** Dati  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , la curva  $\varphi$  definita da  $\varphi(t) = x + t(y - x)$ ,  $t \in [0, 1]$ , è il *segmento* di primo estremo  $x$  e secondo estremo  $y$ .

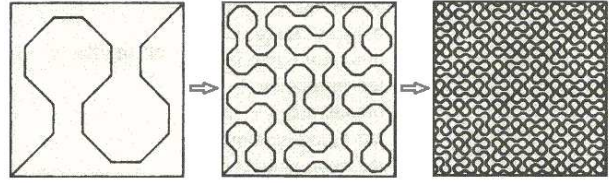
Se  $x = y$ , la  $\varphi$  è costante e il sostegno è ridotto ad un singolo punto.

Nel caso  $x \neq y$ , se si fa variare  $t$  in tutto  $\mathbb{R}$ , la curva  $\varphi$  è la *retta* passante per  $x$  e parallela al vettore  $v = y - x$ .



**Esempio 1.6.** Una curva molto famosa è la cosiddetta *curva di Peano*, scoperta nel 1890. Si tratta di un’applicazione continua (non iniettiva)  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definita come la funzione limite di una successione di funzioni continue, per la quale  $\varphi([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$ ; infatti è stato

dimostrato che, al variare di  $t$  da 0 ad 1, il punto  $\varphi(t)$  descrive un percorso che parte da  $\varphi(0) = (0, 0)$  e termina in  $\varphi(1) = (1, 1)$  dopo esser passato per tutti gli altri punti del quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

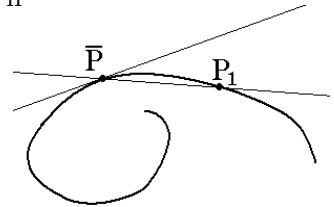


L'esempio precedente fa capire che, se si vuole avere a che fare con curve più vicine a quelle dell'intuizione comune, occorrerà richiedere che l'applicazione  $\varphi$  soddisfi ad ulteriori condizioni.

## 2. Retta tangente

Consideriamo la curva  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ed il punto  $\bar{P} = \varphi(\bar{t})$ . Se  $\varphi$  è derivabile in  $\bar{t}$  con  $\varphi'(\bar{t}) \neq 0$ , si riconosce che  $\varphi(t) \neq \varphi(\bar{t})$  per  $t$  prossimo a  $\bar{t}$ . Infatti si ha che  $\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \left| \frac{\varphi(t) - \varphi(\bar{t})}{t - \bar{t}} \right| = |\varphi'(\bar{t})| > 0$ ,

cosicché per la permanenza del segno esiste un intorno di  $\bar{t}$  nel quale il valore  $\varphi(\bar{t})$  è assunto dalla  $\varphi$  solo in  $\bar{t}$ . Se  $t_1 \neq \bar{t}$  è un punto di tale intorno, è definita la retta  $\sigma_{t_1} \equiv \varphi(\bar{t}) + \frac{\varphi(t_1) - \varphi(\bar{t})}{t_1 - \bar{t}}(t - \bar{t})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , che passa per i punti  $\varphi(\bar{t})$  e  $\varphi(t_1)$ . Poiché  $\exists \lim_{t_1 \rightarrow \bar{t}} \frac{\varphi(t_1) - \varphi(\bar{t})}{t_1 - \bar{t}} = \varphi'(\bar{t})$ ,



si dice che, al tendere di  $t_1$  a  $\bar{t}$ , la retta secante  $\sigma_{t_1}$  tende alla retta

$\sigma \equiv \varphi(\bar{t}) + \varphi'(\bar{t})(t - \bar{t})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , che è chiamata *retta tangente* alla curva

$\varphi$  nel punto  $\varphi(\bar{t})$ . Il vettore  $\varphi'(\bar{t})$  è chiamato *vettore tangente* a  $\varphi$  in  $\varphi(\bar{t})$ , e il corrispondente versore  $\tau_\varphi(\bar{t}) := \frac{\varphi'(\bar{t})}{|\varphi'(\bar{t})|}$  è detto *versore tangente* a  $\varphi$  in  $\varphi(\bar{t})$ .

In cinematica il vettore  $\frac{\varphi(t_1) - \varphi(\bar{t})}{t_1 - \bar{t}}$  è la *velocità media* della particella nel tempo che intercorre fra gli istanti  $\bar{t}$  e  $t_1$ , mentre il vettore  $\varphi'(\bar{t})$  rappresenta la velocità all'istante  $\bar{t}$ .

Tornando agli aspetti geometrici, supponiamo che  $\bar{P}$  sia immagine mediante  $\varphi$  solamente di  $\bar{t}$ . In tal caso la tangente a  $\varphi$  in  $\bar{P}$  è unica, e la sua esistenza, dovuta al fatto che  $\varphi$  è derivabile in  $\bar{t}$  con  $\varphi'(\bar{t}) \neq 0$ , garantisce che nel punto  $\bar{P}$  il sostegno è, diciamo così, "liscio". Se invece  $\varphi$  non è derivabile in  $\bar{t}$ , oppure lo è ma con derivata nulla, allora questa proprietà del sostegno nel punto  $\bar{P}$  non è più assicurata, e vedremo in alcuni degli esempi che seguono una certa varietà di situazioni che si possono presentare.

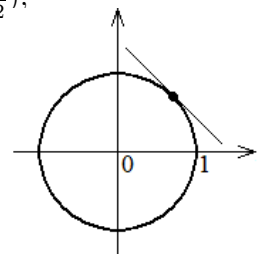
**Esempio 2.1.** Prendiamo la curva  $\varphi \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , ed il valore  $\bar{t} = \frac{\pi}{4}$ , cui corrisponde sul sostegno  $\Gamma$  il punto  $\bar{P} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Si calcola  $\varphi'(\bar{t}) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ , che è il vettore (ed anche il versore) tangente a  $\varphi$  in  $\bar{P}$ . Ne segue che

la retta tangente a  $\varphi$  in  $\bar{P}$  è  $\sigma \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \frac{\pi}{4}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Sommando membro a membro si riesce ad eliminare il parametro  $t$ , e si ottiene l'equazione cartesiana  $x + y = \sqrt{2}$ .

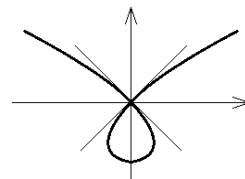
Nel caso della curva  $\chi \equiv \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$ ,  $t \in [0, \pi]$ , che ha il medesimo sostegno  $\Gamma$ ,

il punto  $\bar{P} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ , è raggiunto all'istante  $\tilde{t} = \frac{\pi}{8}$ , e si riconosce che il vettore velocità è  $\chi'(\tilde{t}) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\varphi'(\bar{t})$ . Ovviamente la retta tangente resta quella di prima.



**Esempio 2.2.** Consideriamo la curva dell'Esempio 1.3,  $\varphi \equiv \begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , e sia  $\bar{t} = -1$ , cui corrisponde il punto  $O = (0, 0)$  del sostegno. Il vettore tangente a  $\varphi$  in  $O$  è  $\varphi'(-1) = (2, -2)$ , e la retta tangente è  $\sigma \equiv \begin{cases} x = 2(t + 1) \\ y = -2(t + 1) \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ossia  $y = -x$  in forma cartesiana.

Si osserva che il punto  $O$  corrisponde anche al valore  $\bar{t} = 1$ , cosicché la  $\varphi$  ammette nel punto  $O$  un altro vettore tangente,  $\varphi'(1) = (2, 2)$ , ed un'altra retta tangente,  $\tilde{\sigma} \equiv \begin{cases} x = 2(t - 1) \\ y = 2(t - 1) \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ossia  $y = x$  in forma cartesiana.



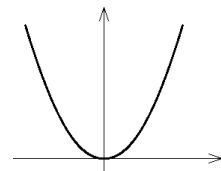
**Esempio 2.3.** Consideriamo la curva  $\varphi \equiv (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , dell'Esempio 1.4. Per ogni  $t \in \mathbb{R}$  si calcola  $\varphi'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ , che è il vettore tangente a  $\varphi$  in  $\varphi(t)$ . Da notare che  $|\varphi'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$  non dipende da  $t$ : in cinematica ciò significa che la velocità è costante in modulo.

**Esempio 2.4.** La curva  $\varphi \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ha per sostegno la parabola di equazione cartesiana  $y = x^2$ . Nel punto  $O = (0, 0) = \varphi(0)$  la curva ammette retta tangente, dato che  $\varphi$  è derivabile in  $\bar{t} = 0$  con  $\varphi'(0) \neq (0, 0)$ . Pertanto, da un punto di vista geometrico, il punto  $O$  è un punto "liscio" del sostegno.

Da notare che la stessa parabola ammette anche delle rappresentazioni rispetto alle quali la retta tangente in  $O$  non esiste, per via del fatto che non c'è derivabilità oppure che la derivata è nulla. Basta considerare

rispetto alle applicazioni  $\psi \equiv \begin{cases} x = \sqrt[3]{t} \\ y = \sqrt[3]{t^2} \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , e  $\chi \equiv \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^6 \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , l'una e l'altra in  $\bar{t} = 0$ .

Questa osservazione evidenzia il fatto che la proprietà di ammettere o non ammettere retta tangente è propria della curva e non del sostegno.

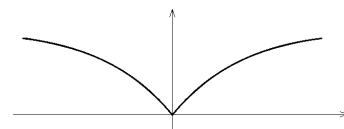


**Esempio 2.5.** Le curve

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = t \\ y = \arctg |t| \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \psi \equiv \begin{cases} x = t^3 \\ y = \arctg |t^3| \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

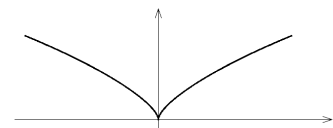
hanno per sostegno il grafico della funzione  $y = \arctg |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Considerato  $\bar{t} = 0$ , si vede che  $\varphi(\bar{t}) = \psi(\bar{t}) = O = (0, 0)$ ; inoltre  $\varphi$  non è derivabile in  $\bar{t}$ , mentre invece esiste  $\psi'(\bar{t}) = (0, 0)$ .



**Esempio 2.6.** Consideriamo la curva  $\varphi \equiv \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

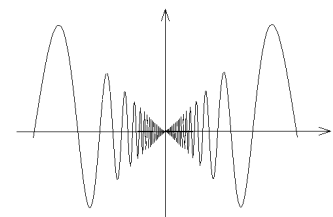
Ricavando  $t$  dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene l'equazione cartesiana  $y = \sqrt[3]{x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , grazie alla quale è facile disegnare il sostegno di  $\varphi$ , che presenta una cuspidi nel punto  $O = (0, 0)$ . Il punto  $O$  corrisponde a  $\bar{t} = 0$ , e si calcola che  $\varphi'(\bar{t}) = (0, 0)$ .



**Esempio 2.7.** Posto  $g(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{1}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$ , si consideri

la curva  $\varphi \equiv \begin{cases} x = t \\ y = g(t) \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , il cui sostegno è il grafico della

funzione  $y = g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Considerato  $\bar{t} = 0$ , si vede che  $\varphi(\bar{t}) = O = (0, 0)$ , e che  $\varphi$  non è derivabile in  $\bar{t}$ .



### 3. Curve regolari

**Definizione 3.1.** Una curva  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice regolare se  $\varphi \in C^1([a, b])$  e  $\varphi'(t) \neq 0 \forall t \in ]a, b[$ . La curva  $\varphi$  si dice regolare a tratti se esiste  $\{t_0, t_1, \dots, t_k\}$  suddivisione di  $[a, b]$  tale che  $\forall i = 1, 2, \dots, k$  la curva  $\varphi|_{[t_{i-1}, t_i]}$  è regolare.

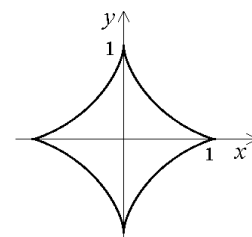
Per quanto visto in precedenza, se  $\varphi$  è regolare, allora  $\forall \bar{t} \in ]a, b[$  si ha che  $\varphi(t) \neq \varphi(\bar{t})$  per  $t$  intorno a  $\bar{t}$  ed inoltre esiste la tangente a  $\varphi$  in  $\varphi(\bar{t})$ .

**Osservazione 3.1.** Anche la regolarità è proprietà della curva e non del sostegno, come dimostrano le curve  $\varphi, \psi$  e  $\chi$  dell'Esempio 2.4, considerate per  $t \in [-1, 1]$ : la prima è regolare, la seconda no, neanche a tratti, e la terza è regolare solo a tratti (essendo regolari  $\chi_{[-1, 0]}$  e  $\chi_{[0, 1]}$ ).

**Esempio 3.1.** La curva  $\varphi \equiv \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$ , detta *asteroide*, non è regolare. Si calcola infatti che  $|\varphi'(t)| = 3|\sin t \cos t| \forall t \in [0, 2\pi]$ , e dunque risulta  $\varphi'(t) = 0$  per  $t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ .

Essa è tuttavia regolare a tratti, dato che sono regolari le curve

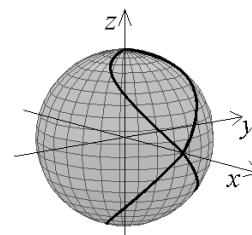
$$\varphi|_{[0, \frac{\pi}{2}]}, \varphi|_{[\frac{\pi}{2}, \pi]}, \varphi|_{[\pi, \frac{3\pi}{2}]}, \varphi|_{[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]}.$$



**Esempio 3.2.** La curva  $\varphi \equiv \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2 \sin \frac{t}{2} \end{cases}, t \in [0, 4\pi]$ , è chiamata

*curva di Viviani*. Il suo sostegno è l'intersezione fra la superficie sferica  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e la superficie cilindrica  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ .

Si riconosce che  $\varphi \in C^1([0, 4\pi])$  e  $\varphi'(t) \neq 0 \forall t \in ]0, 4\pi[$ , cosicché  $\varphi$  è regolare.



-) CURVE CARTESIANE. Data  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, è possibile associare ad  $f$  la curva

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, t \in [a, b],$$

la quale ha per sostegno il grafico di  $f$ .

Le curve come la  $\varphi$ , ossia quelle in cui si assume come parametro una delle variabili cartesiane, sono chiamate *curve cartesiane*.

La curva  $\varphi$  può essere brevemente designata come *la curva cartesiana*  $y = f(x), x \in [a, b]$ . Si riconosce che  $\varphi$  è *semplice ed aperta*.

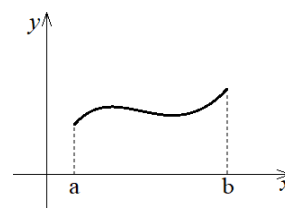
Inoltre  $\varphi$  è *regolare* se (e solo se)  $f \in C^1([a, b])$ . Nel caso che  $\varphi$  sia

regolare, fissato  $\bar{t} \in ]a, b[$ , il vettore *tangente* a  $\varphi$  in  $\varphi(\bar{t})$  è  $\varphi'(\bar{t}) = (1, f'(\bar{t}))$ , e la *retta tangente*

è  $\sigma \equiv \begin{cases} x = t \\ y = f(\bar{t}) + f'(\bar{t})(t - \bar{t}) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ , che ovviamente coincide con la già nota tangente al grafico di  $f$  in  $(\bar{t}, f(\bar{t}))$ .

A ben vedere, nulla vieta che si parli di curva cartesiana anche nel caso in cui  $f$  sia una funzione a  $k$  componenti,  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$ . In tal caso la curva è  $\varphi(t) = (t, f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t))$ , avente per sostegno il grafico di  $f$  (sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{k+1}$ ), e il vettore tangente a  $\varphi$  in  $\varphi(\bar{t})$  è  $\varphi'(\bar{t}) = (1, f'_1(\bar{t}), f'_2(\bar{t}), \dots, f'_k(\bar{t}))$ .

Ad esempio, la funzione  $f(x) = (\cos x, \sin x)$  genera l'elica  $\varphi(t) = (t, \cos t, \sin t)$ , il cui sostegno vive sulla superficie cilindrica  $y^2 + z^2 = 1$ .



**Osservazione 3.2.** Si è detto che ogni curva cartesiana di classe  $C^1$  è regolare. Si può dimostrare viceversa che ogni curva regolare è localmente una curva cartesiana di classe  $C^1$ . Più precisamente, data una curva regolare  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , e dato  $\bar{t} \in ]a, b[$ , allora esiste  $[t_1, t_2] (\subseteq [a, b])$ , intorno di  $\bar{t}$ , tale che il sostegno di  $\varphi|_{[t_1, t_2]}$  è grafico di una funzione  $y = f(x)$  o  $x = f(y)$ , che è di classe  $C^1$  in un intervallo compatto.

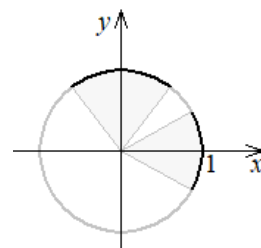
**Esempio 3.3.** Sia  $\varphi \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ .

Preso  $\bar{t} = \frac{\pi}{2}$ , si vede che la porzione di sostegno corrispondente all'intervallo  $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$  è grafico della funzione  $y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , e quindi può essere riparametrizzata nella forma

$$\psi \equiv \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Invece, preso  $\bar{t} = 0$ , non esistono intorno  $[t_1, t_2]$  di  $\bar{t}$  tali che  $\varphi([t_1, t_2])$  sia grafico di una funzione  $y = f(x)$ . D'altra parte, la porzione di sostegno  $\varphi([-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}])$  è grafico della funzione  $x = \cos(\arcsen y) = \sqrt{1-y^2}$ ,  $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , e si parametrizza nella forma

$$\chi \equiv \begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y = t \end{cases}, t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

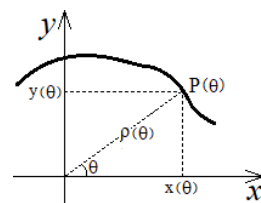


-) CURVE IN COORDINATE POLARI. Si è visto come sia possibile dare una rappresentazione parametrica ad una curva assegnata mediante l'equazione cartesiana  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Lo stesso si può fare a partire da una equazione polare, ossia una equazione del tipo  $\rho = \rho(\vartheta)$ ,  $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ , nella quale  $\rho$  e  $\vartheta$  indicano le coordinate polari del punto  $(x, y)$ .

In questo caso una rappresentazione parametrica della curva è data da

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = \rho(\vartheta) \cos \vartheta \\ y = \rho(\vartheta) \sin \vartheta \end{cases}, \vartheta \in [\alpha, \beta].$$

Da notare che non c'è motivo di escludere che  $\rho(\vartheta)$  assuma anche valori negativi: se  $\rho(\vartheta) < 0$ , il punto  $(\rho(\vartheta) \cos \vartheta, \rho(\vartheta) \sin \vartheta)$  viene automaticamente a coincidere con il punto di coordinate polari  $\vartheta + \pi$  (anomalia) e  $|\rho(\vartheta)|$  (distanza dall'origine), in accordo con quanto suggerirebbe l'intuizione comune.



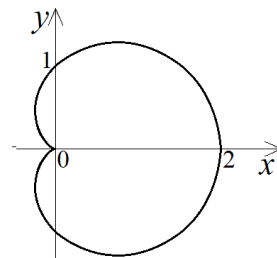
Si riconosce che, supposto  $\rho \in C^1([\alpha, \beta])$ , allora  $|\varphi'(\vartheta)| = \sqrt{\rho^2(\vartheta) + \rho'^2(\vartheta)}$ , cosicché  $\varphi$  è regolare se (e solo se)  $\rho^2(\vartheta) + \rho'^2(\vartheta) \neq 0 \quad \forall \vartheta \in ]\alpha, \beta[$ .

**Esempio 3.4.** La curva di equazione polare  $\rho = 1 + \cos \vartheta$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ , è chiamata *cardioide*.

Una sua rappresentazione parametrica è data da

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = (1 + \cos \vartheta) \cos \vartheta \\ y = (1 + \cos \vartheta) \sin \vartheta \end{cases}, \vartheta \in [0, 2\pi].$$

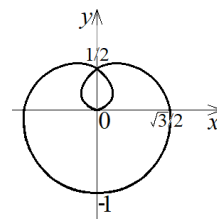
La curva  $\varphi$  non è regolare, dato che  $\rho(\pi) = \rho'(\pi) = 0$ ; tant'è che nel punto  $(0,0)$  il suo sostegno presenta una cuspide. Tuttavia in questo caso un banale espediente consente di recuperare la regolarità senza che il sostegno risulti modificato: basta cambiare l'intervallo di variabilità del parametro  $\vartheta$  da  $[0, 2\pi]$  a  $[-\pi, \pi]$ .



**Esempio 3.5.** La curva di equazione polare  $\rho = \text{sen } \frac{\vartheta}{3}$ ,  $\vartheta \in [0, 3\pi]$ , si rappresenta parametricamente mediante l'applicazione

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = \text{sen } \frac{\vartheta}{3} \cos \vartheta \\ y = \text{sen } \frac{\vartheta}{3} \text{sen } \vartheta \end{cases}, \vartheta \in [0, 3\pi].$$

Si riconosce che  $\rho \in C^1([0, 3\pi])$  e che la coppia  $(\rho(\vartheta), \rho'(\vartheta))$  non è mai nulla; pertanto  $\varphi$  è regolare.

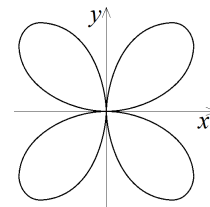


**Esempio 3.6.** La curva di equazione polare  $\rho = \text{sen } 2\vartheta$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ , è rappresentata in forma parametrica da

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = \text{sen } 2\vartheta \cos \vartheta \\ y = \text{sen } 2\vartheta \text{sen } \vartheta \end{cases}, \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Osservato che  $\rho(\vartheta)$  assume anche valori negativi, si riconosce che, al crescere di  $\vartheta$ , la curva passa dal primo quadrante al quarto, poi al terzo e infine al secondo.

Poiché  $\rho \in C^1([0, 2\pi])$  e la coppia  $(\rho(\vartheta), \rho'(\vartheta))$  non è mai nulla, la curva  $\varphi$  è regolare.

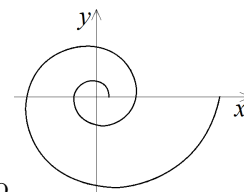


**Esempio 3.7.** La curva di equazione polare  $\rho = a^\vartheta$ , che qui assumiamo con  $a > 1$  e  $\vartheta \in [0, 4\pi]$ , è chiamata *spirale logaritmica*. Una sua rappresentazione parametrica è data da

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = a^\vartheta \cos \vartheta \\ y = a^\vartheta \text{sen } \vartheta \end{cases}, \vartheta \in [0, 4\pi].$$

Si osserva che, assegnando a  $\vartheta$  valori negativi sempre più grandi, la curva si avvicina al punto  $(0,0)$  avvolgendolo infinite volte senza mai raggiungerlo.

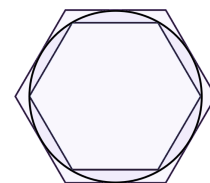
Si riconosce facilmente che la curva  $\varphi$  è regolare.



## 4. Lunghezza di una curva

E' noto che Archimede, per calcolare la lunghezza della circonferenza, pensò bene di approssimarla mediante poligoni regolari aventi un numero di lati via via crescente, fino al poligono con 96 lati.

Questa è ancora oggi l'idea su cui si basa più in generale la definizione di lunghezza di una curva qualsiasi, anche nello spazio a più dimensioni.



Consideriamo la curva  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ad ogni  $\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$  suddivisione di  $[a, b]$  associamo la *poligonale*  $\mathcal{P}(\mathcal{D})$  costituita dai segmenti di estremi  $\varphi(t_{i-1})$  e  $\varphi(t_i)$ , la cui lunghezza è  $l(\mathcal{P}(\mathcal{D})) = \sum_{i=1}^k |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|$ . Inoltre indichiamo con  $\mathcal{S}([a, b])$  l'insieme delle suddivisioni di  $[a, b]$ .



**Definizione 4.1** Data la curva  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , si chiama *lunghezza* di  $\varphi$  il numero  $l(\varphi) = \sup \{ l(\mathcal{P}(\mathcal{D})) \mid \mathcal{D} \in \mathcal{S}([a, b]) \}$ .

E' evidente che  $l(\varphi) \in [0, +\infty[$ , e che  $l(\varphi) = 0$  se e solo se  $\varphi$  è costante.

Si dice che  $\varphi$  è *rettificabile* se  $l(\varphi) < +\infty$ . Il teorema che segue stabilisce una condizione sufficiente per la rettificabilità e fornisce uno strumento molto efficace per il calcolo della lunghezza.

**Teorema 4.1** Se  $\varphi \in C^1([a, b])$ , allora  $\varphi$  è rettificabile e  $l(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt$ .

**Dim.** Posto  $\mu = \int_a^b |\varphi'(t)| dt$ , faremo vedere che:

a)  $\forall \mathcal{D} \in \mathcal{S}([a, b]) \quad l(\mathcal{P}(\mathcal{D})) \leq \mu$ ;    b)  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \mathcal{D} \in \mathcal{S}([a, b]) \quad l(\mathcal{P}(\mathcal{D})) > \mu - \varepsilon$ .



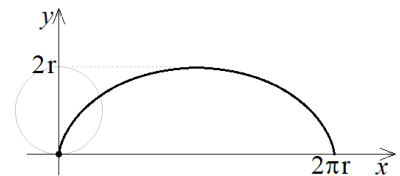
La (a) è facile: fissata  $\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \dots, t_k\} \in \mathcal{S}([a, b])$ , si calcola  $l(\mathcal{P}(\mathcal{D})) = \sum_{i=1}^k |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^k \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)| dt = \int_a^b |\varphi'(t)| dt = \mu$ . Con ciò è provato che  $\varphi$  è rettificabile. Quanto alla (b), fissato  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , osserviamo dapprima che, per l'uniforme continuità di  $\varphi'$  in  $[a, b]$ ,  $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$  tale che  $\forall s, t \in [a, b] \ |s - t| < \delta \Rightarrow |\varphi'(s) - \varphi'(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . Quindi prendiamo  $\mathcal{D} \in \mathcal{S}([a, b])$  con  $|\mathcal{D}| < \delta$ . Fissiamo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  e osserviamo che  $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$  risulta  $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(\tau) d\tau = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\varphi'(\tau) - \varphi'(t)) d\tau + \varphi'(t)(t_i - t_{i-1})$ ; cosicché  $\varphi'(t) = \frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\varphi'(\tau) - \varphi'(t)) d\tau$ , da cui ancora  $|\varphi'(t)| \leq \frac{|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} + \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(\tau) - \varphi'(t)| d\tau \leq \frac{|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} + \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} d\tau = \frac{|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . Ne segue, integrando in  $dt$  fra  $t_{i-1}$  e  $t_i$ , che  $\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)| dt \leq |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(t_i - t_{i-1})$ ; da cui infine, sommando per  $i$  da 1 a  $k$ , si conclude che  $\int_a^b |\varphi'(t)| dt \leq l(\mathcal{P}(\mathcal{D})) + \frac{\varepsilon}{2} < l(\mathcal{P}(\mathcal{D})) + \varepsilon$  ■

**Osservazione 4.1.** Il teorema si applica in particolare alle curve regolari. Dalle curve regolari il teorema si estende alle curve regolari a tratti, con un ragionamento che in verità è più delicato di quanto può sembrare a prima vista. Infatti, già nell'enunciato c'è da notare che nell'  $\int_a^b |\varphi'(t)| dt$  la funzione integranda  $|\varphi'|$  è definita in  $[a, b] \setminus Z$ , dove  $Z$  è un insieme finito di punti di  $]a, b[$ , ed è ivi limitata e continua. Inoltre, per ciò che riguarda la dimostrazione, c'è da dire che andrebbe preliminarmente verificato che, preso  $c \in ]a, b[$ , allora  $l(\varphi) = l(\varphi|_{[a, c]}) + l(\varphi|_{[c, b]})$ , ossia  $\sup \{ l(\mathcal{P}(\mathcal{D})) / \mathcal{D} \in \mathcal{S}([a, b]) \} = \sup \{ l(\mathcal{P}(\mathcal{D})) / \mathcal{D} \in \mathcal{S}([a, c]) \} + \sup \{ l(\mathcal{P}(\mathcal{D})) / \mathcal{D} \in \mathcal{S}([c, b]) \}$ .

**Osservazione 4.2.** La lunghezza testé definita è una proprietà della curva e non del sostegno. Ad esempio, le curve  $\varphi$  e  $\psi$  dell'Esempio 1.1 hanno lunghezze diverse,  $l(\varphi) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$  e  $l(\psi) = \int_0^{3\pi} dt = 3\pi$ , pur avendo il medesimo sostegno. Tuttavia si riconosce che *due curve semplici aventi il medesimo sostegno hanno anche la stessa lunghezza*.

**Esempio 4.1.** Dati  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , con  $x \neq y$ , il segmento di estremi  $x$  ed  $y$ , parametrizzato da  $\varphi \equiv x + t(y - x)$ ,  $t \in [0, 1]$ , ha lunghezza  $l(\varphi) = \int_0^1 |\varphi'(t)| dt = \int_0^1 |y - x| dt = |y - x|$ , che è proprio quanto ci si doveva aspettare.

**Esempio 4.2.** La curva  $\varphi \equiv \begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , è chiamata *cicloide*. Il suo sostegno è la traiettoria che viene descritta da un punto di una circonferenza mentre questa rotola su una retta senza slittare.

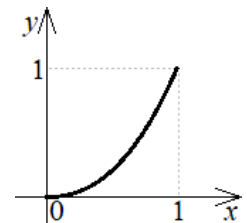


Si riconosce facilmente che  $\varphi$  è rettificabile e vale

$$l(\varphi) = r \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \sqrt{2} r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \dots = 8r.$$

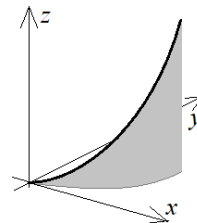
-) LUNGHEZZA DI CURVE CARTESIANE. Consideriamo la curva cartesiana  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , che, com'è noto, è parametrizzata da  $\varphi \equiv (x, f(x))$ ,  $x \in [a, b]$ . Si riconosce facilmente che, se  $f \in C^1([a, b])$ , allora  $\varphi$  è rettificabile e vale  $l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ .

Ad esempio, l'arco di parabola  $y = x^2$ ,  $x \in [0, 1]$ , è rettificabile e ha lunghezza  $l = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \dots = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \log(2 + \sqrt{5}) \simeq 1,48$  (avendo calcolato che  $\int \sqrt{1 + 4x^2} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx + \int \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}} dx = \frac{1}{2} \log(2x + \sqrt{1 + 4x^2}) + \int x d\sqrt{1 + 4x^2} = \frac{1}{2} \log(2x + \sqrt{1 + 4x^2}) + x \sqrt{1 + 4x^2} - \int \sqrt{1 + 4x^2} dx$ , e che quindi  $\int \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{4} \log(2x + \sqrt{1 + 4x^2}) + \frac{1}{2} x \sqrt{1 + 4x^2}$ ).



Se più in generale la funzione  $f$  è vettoriale, la formula per la lunghezza continua a valere, purché la si scriva nella forma  $l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$ .

Ad esempio, la curva ottenuta come intersezione delle superfici cilindriche  $y = f_1(x) = \frac{3}{2}x^2$  e  $z = f_2(x) = \frac{3}{2}x^3$ , con  $x \in [0, 2]$ , che è parametrizzata da  $\varphi \equiv (x, \frac{3}{2}x^2, \frac{3}{2}x^3)$ ,  $x \in [0, 2]$ , ha lunghezza  $l = \int_0^2 \sqrt{1 + 9x^2 + \frac{81}{4}x^4} dx = \int_0^2 (1 + \frac{9}{2}x^2) dx = 14$ .

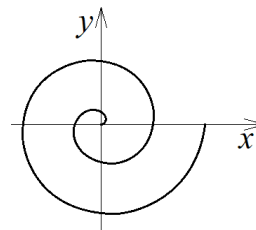


-) LUNGHEZZA DI CURVE POLARI. Prendiamo la curva di equazione polare  $\rho = \rho(\vartheta)$ ,  $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ , che, com'è noto, è parametrizzata da  $\varphi \equiv (\rho(\vartheta) \cos \vartheta, \rho(\vartheta) \sin \vartheta)$ ,  $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ . Si riconosce facilmente che, se  $\rho \in C^1([\alpha, \beta])$ , allora  $\varphi$  è rettificabile e vale  $l(\varphi) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\vartheta) + \rho'^2(\vartheta)} d\vartheta$ .

Ad esempio, la cardiode di equazione polare  $\rho = a(1 + \cos \vartheta)$ , con  $a > 0$  e  $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ , è rettificabile e ha lunghezza  $l = \int_{-\pi}^\pi \sqrt{a^2(1 + \cos \vartheta)^2 + a^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta = \sqrt{2} a \int_{-\pi}^\pi \sqrt{1 + \cos \vartheta} d\vartheta = 2 a \int_{-\pi}^\pi \cos \frac{\vartheta}{2} d\vartheta = 8a$ .

In modo analogo, la spirale logaritmica di equazione polare  $\rho = e^\vartheta$ , con  $\vartheta \in [0, 4\pi]$ , è rettificabile e ha lunghezza  $l = \int_0^{4\pi} \sqrt{e^{2\vartheta} + e^{2\vartheta}} d\vartheta = \sqrt{2} \int_0^{4\pi} e^\vartheta d\vartheta = \sqrt{2}(e^{4\pi} - 1)$ .

**Esempio 4.3.** La curva di equazione polare  $\rho = a\vartheta$ , che qui assumiamo con  $a > 0$  e  $\vartheta \in [0, 4\pi]$ , è la cosiddetta *spirale di Archimede*. Il sostegno ha appunto la forma di una spirale, nella quale la distanza fra i bracci è costante (mentre invece nella spirale logaritmica la distanza fra i bracci aumenta in progressione geometrica, facendo sì che la curva, crescendo, non cambi forma). La spirale di Archimede può essere interpretata come la traiettoria descritta da un punto che si muove di moto uniforme su una semiretta che ruota con velocità angolare costante attorno alla sua origine (mentre nel caso della spirale logaritmica il moto del punto sulla semiretta è uniformemente accelerato).



Anche la spirale di Archimede è una curva rettificabile, la cui lunghezza è  $l = \int_0^{4\pi} \sqrt{a^2 + a^2\vartheta^2} d\vartheta = a \int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta = \dots = \frac{1}{2} a \log(4\pi + \sqrt{1 + 16\pi^2}) + 2\pi a \sqrt{1 + 16\pi^2}$ .

-) UNA CURVA DI LUNGHEZZA INFINITA. Consideriamo la curva cartesiana  $\varphi = (x, f(x))$ ,  $x \in [0, 1]$ , dove  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \sin \frac{\pi}{2x} & \text{se } x \in ]0, 1] \end{cases}$ . Dopo aver osservato che  $f$  (e quindi anche  $\varphi$ ) non è derivabile in  $x = 0$ , dimostriamo che la curva non è rettificabile.

Fissato  $k \in \mathbb{N}$ , indichiamo con  $\mathcal{P}_k$  la poligonale relativa alla suddivisione  $\{t_0^{(k)}, t_1^{(k)}, \dots, t_k^{(k)}\}$ , dove  $t_0^{(k)} = 0$  e  $t_i^{(k)} = \frac{1}{2^{(k-i)+1}} \forall i = 1, 2, \dots, k$ .

Si riconosce che i vertici di  $\mathcal{P}_k$  sono i punti  $\varphi(t_0^{(k)}) = (0, 0)$  e  $\varphi(t_i^{(k)}) = (\frac{1}{2^{(k-i)+1}}, \frac{(-1)^{k-i}}{2^{(k-i)+1}})$ , cosicché risulta  $l(\mathcal{P}_k) > \sum_{i=2}^k |\varphi(t_i^{(k)}) - \varphi(t_{i-1}^{(k)})| =$

$$\sum_{i=2}^k \sqrt{(\frac{1}{2^{(k-i)+1}} - \frac{1}{2^{(k-i)+3}})^2 + (\frac{1}{2^{(k-i)+1}} + \frac{1}{2^{(k-i)+3}})^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1})^2 + (\frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2i+1})^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sqrt{16i^2+4}}{4i^2-1} > \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sqrt{16i^2}}{4i^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i};$$

e da ciò segue che  $\lim_{k \rightarrow \infty} l(\mathcal{P}_k) = +\infty$ .

Si conclude che  $\sup \{l(\mathcal{P}(\mathcal{D})) / \mathcal{D} \in \mathcal{S}[0, 1]\} = +\infty$ .

