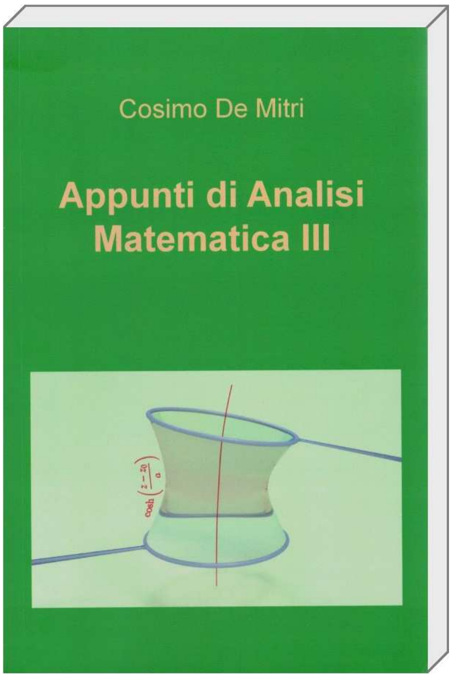
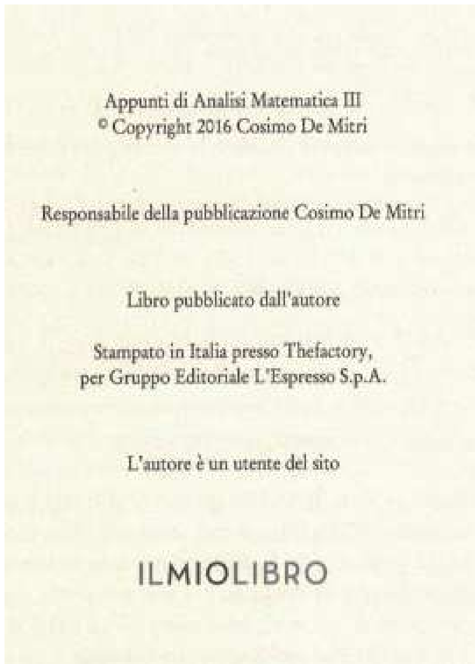
MISURA E INTEGRAZIONE

SECONDO LEBESGUE

– Cosimo De Mitri –

ESTRATTO DA




Appunti di Analisi Matematica III

Responsabile della pubblicazione Cosimo De Mitri

Libro pubblicato dall'autore

Stampato in Italia presso Thefactory,
per Gruppo Editoriale L'Espresso S.p.A.

L'autore è un utente del sito

ILMIOLIBRO

https://ilmiolibro.kataweb.it/libro/didattica-e-dispense/216997/appunti-di-analisi-matematica-iii-3/

I N D I C E

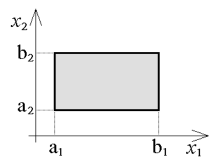
H

MISURA E INTEGRAZIONE SECONDO LEBESGUE

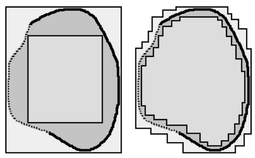
(C. De Mitri)

H1. La misura secondo Lebesgue

-) Consideriamo in $\mathbb{R}^n$ l'*intervallo* (compatto) $I = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, dove, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $a_i < b_i$. Definiamo *misura* (*elementare*) di I il numero $\mu(I) = \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. Nei casi $n = 1, 2, 3$ si parla rispett/te di *lunghezza* (di un segmento sulla retta), di *area* (di un rettangolo nel piano), e di *volume* (di un parallepipedo rettangolo nello spazio).

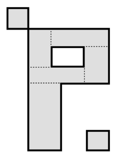


Ma gli intervalli non sono abbastanza flessibili da approssimare adeguatamente insiemi di forma qualsiasi; a tale scopo sono invece più indicati i plurintervalli. Con questi verranno approssimati gli aperti e i compatti, i quali a loro volta saranno utilizzati per approssimare gli insiemi limitati qualsiasi.



approssimazione con intervalli — approssimazione con plurintervalli

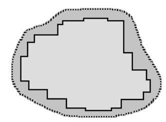
-) Chiamiamo *plurintervallo* di $\mathbb{R}^n$ ogni insieme P di $\mathbb{R}^n$ che sia l'unione di un numero finito di intervalli di $\mathbb{R}^n$, $P = \bigcup\limits_{r=1}^{h} I_r$.
Si può provare che gli intervalli I_r possono sempre essere scelti in modo da risultare a due a due privi di punti interni comuni; inoltre, pur con questa limitazione, le possibili rappresentazioni di P sono sempre infinite. Nel seguito indicheremo con $\mathcal{P}$ l'insieme di tutti i plurintervalli di $\mathbb{R}^n$.



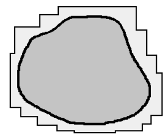
Considerato il plurintervallo $P = \bigcup\limits_{r=1}^{h} I_r$, con $I_1, I_2, \ldots, I_h$ intervalli a due a due privi di punti interni comuni, chiamiamo *misura* (*elementare*) di P il numero $\mu(P) = \sum\limits_{r=1}^{h} \mu(I_r)$. Si può provare che questa definizione è ben posta, nel senso che il risultato non dipende dal modo in cui P viene rappresentato. Inoltre si riconosce che, se P è un intervallo, allora la misura di P inteso come plurintervallo coincide con la misura di P inteso come intervallo. Altrettanto facilmente si riconosce che:
$\forall\, P', P'' \in \mathcal{P}$, se $P' \subseteq P''$, allora $\mu(P') \leq \mu(P'')$ (μ è crescente).

-) Passiamo ora a definire la misura degli aperti e dei compatti, che verranno approssimati gli uni e gli altri mediante plurintervalli, i primi dall'interno e i secondi dall'esterno.

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. Si pone $m_a(A) = \sup\{\mu(P) \,/\, P\in\mathcal{P}\,,\, P \subseteq A\}$ [1]. E' evidente che $m_a(A) \geq 0$ e si riconosce facilmente che, se A è limitato, $m_a(A) < +\infty$. Si può provare inoltre che, $\forall\, P\in\mathcal{P}$, $m_a(P^o) = \mu(P)$.



Sia K un compatto di $\mathbb{R}^n$. Si pone $m_c(K) = \inf\{\mu(P) \,/\, P\in\mathcal{P}\,,\, P \supseteq K\}$. Si riconosce facilmente che $0 \leq m_c(K) < +\infty$. In particolare risulta $m_c(\emptyset) = 0$. Inoltre è evidente che, $\forall\, P\in\mathcal{P}$, $m_c(P) = \mu(P)$.



Esempio H1.1. Considerato $x\in\mathbb{R}^n$, abbiamo che $m_c(\{x\}) = 0$.
Infatti, se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, fissato $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ e posto $I_\varepsilon = \bigtimes_{i=1}^{n} [x_i - \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2}}\,, x_i + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2}}\,]$, si vede che $x\in I_\varepsilon\in\mathcal{P}$ e che $\mu(I_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$; quindi $\inf\{\mu(P) \,/\, x\in P\in\mathcal{P}\} = 0$.

Osservazione H1.1. Si può dimostrare che, *dati in $\mathbb{R}^n$ il compatto K e l'aperto A, se $K \subseteq A$, allora $m_c(K) \leq m_a(A)$.*

-) Finalmente possiamo definire la misura degli insiemi qualsiasi, partendo dagli insiemi limitati, che verranno approssimati dall'esterno mediante aperti e dall'interno mediante compatti. Successivamente saranno presi in esame anche gli insiemi illimitati.

Sia X un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$. Considerati gli insiemi numerici:
$\Sigma'(X) = \{m_c(K)/K$ compatto, $K \subseteq X\}$, $\Sigma''(X) = \{m_a(A)/A$ aperto, $A \supseteq X\}$,
si vede che essi sono non vuoti; inoltre, in virtù della Osserv/ne H1.1, essi sono separati. Pertanto risulta $\sup\Sigma'(X) \leq \inf\Sigma''(X)$. Gli estremi $\sup\Sigma'(X)$ ed $\inf\Sigma''(X)$ sono detti rispettivamente *misura interna* e *misura esterna* di X, e saranno indicati con $m_i(X)$ ed $m_e(X)$. E' evidente che $0 \leq m_i(X) \leq m_e(X) < +\infty$.
Diciamo che X è *misurabile* (*secondo Lebesgue*) se $m_i(X) = m_e(X)$; in tal caso chiamiamo *misura* (*di Lebesgue*) di X, e la indichiamo con $m^*(X)$, il valore comune di queste due misure, ossia l'unico elemento separatore degli insiemi $\Sigma'(X)$ e $\Sigma''(X)$. In seguito indicheremo con $\mathcal{M}^*$ la famiglia degli insiemi limitati e misurabili di $\mathbb{R}^n$.

Si può provare che, se X è un aperto limitato oppure un compatto, allora $X\in\mathcal{M}^*$ e si ha rispettivamente $m^*(X) = m_a(X)$ e $m^*(X) = m_c(X)$.

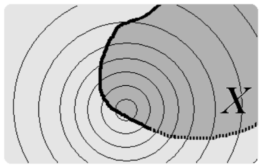
Osservazione H1.2. Nella teoria della misura di Peano–Jordan, che storicamente precede quella di Lebesgue, le misure interna ed esterna dell'insieme limitato X vengono definite senza passare attraverso le misure degli aperti e dei compatti, ma direttamente mediante i plurintervalli, che dunque vengono usati come "approssimatori finali". Si pone cioè: $\tilde{m}_i(X) = \sup\{\mu(P) \,/\, P\in\mathcal{P},\, P \subseteq X\}$[2] e $\tilde{m}_e(X) = \inf\{\mu(P) \,/\, P\in\mathcal{P},\, P \supseteq X\}$.

[1] Conveniamo che questo sup sia 0 quando $A = \emptyset$, ossia quando A non contiene plurintervalli.
[2] Conveniamo che questo sup sia 0 quando X non contiene plurintervalli.

Dopo di ciò, anche qui, riconosciuto che $\tilde{m}_i(X) \leq \tilde{m}_e(X)$, si dice che X è *misurabile* (*secondo Peano-Jordan*) se $\tilde{m}_i(X) = \tilde{m}_e(X)$, e si definisce *misura* (*di Peano-Jordan*) di X il numero $\tilde{m}(X) := \tilde{m}_i(X) = \tilde{m}_e(X)$.
E' facile riconoscere che $\tilde{m}_i(X) \leq m_i(X)$, dal momento che ogni plurintervallo P è un compatto e risulta $m_c(P) = \mu(P)$.
Osserviamo ora che $m_e(X) \leq \tilde{m}_e(X)$. Supponiamo infatti per assurdo che $m_e(X) > \tilde{m}_e(X)$, e dunque che esista $P \in \mathcal{P}$ tale che $P \supseteq X$ e $\mu(P) < m_e(X)$. Posto $\varepsilon = m_e(X) - \mu(P)$, consideriamo un plurintervallo Q (si può provare che esiste) tale che $Q^o \supseteq P$ e $\mu(Q) < \mu(P) + \varepsilon$. Risulta allora $m_a(Q^o) = \mu(Q) < \mu(P) + \varepsilon = m_e(X)$, mentre, per come è definita $m_e(X)$, dovrebbe risultare $m_a(Q^o) \geq m_e(X)$.
Così è stabilito che $\tilde{m}_i(X) \leq m_i(X) \leq m_e(X) \leq \tilde{m}_e(X)$, e da ciò segue che, *se X è misurabile secondo Peano-Jordan, allora X è misurabile anche secondo Lebesgue, e le due misure di X coincidono.*
Al contrario, *esistono insiemi misurabili secondo Lebesgue che non sono misurabili secondo Peano-Jordan*. Ad esempio l'insieme $X = \mathbb{Q}^n \cap [0,1]^n$ di $\mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Lebesgue, come vedremo più avanti, ma non secondo Peano-Jordan. Quest'ultima affermazione si prova osservando che $\tilde{m}_i(X) = 0$, dato che X non contiene plurintervalli, mentre $\tilde{m}_e(X) = 1$, dato che $[0,1]^n$ è il più piccolo plurintervallo contenente X.
Del resto, *gli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan si caratterizzano*, come si può dimostrare, *dall'avere frontiera misurabile e di misura nulla*, ed invece per il nostro insieme X risulta $\partial X = [0,1]^n$ e quindi $\tilde{m}(\partial X) = 1$. Anzi cogliamo l'occasione per osservare che nella teoria di Lebesgue il fatto di avere frontiera di misura nulla non è condizione necessaria per la misurabilità dell'insieme, se è vero che il nostro insieme X è misurabile secondo Lebesgue e che la misura di Lebesgue di ∂X è 1.
L'esempio dell'insieme $X = \mathbb{Q}^n \cap [0,1]^n$ ci consente di mettere in luce anche un altro importante punto debole della misura di Peano-Jordan, ossia il fatto che *la famiglia degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan non è chiusa rispetto alle unioni numerabili*. Si riconosce infatti, procedendo come nell'Esempio H1.1, che, $\forall\, x \in X$, il singoletto $\{x\}$ è misurabile secondo Peano-Jordan, mentre l'unione, X, di questi singoletti s'è visto che non lo è. Vedremo più avanti che con la teoria di Lebesgue anche questo inconveniente viene eliminato.
Concludiamo questa nota osservando che la famiglia degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan, benché meno ricca di quella degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, è tale comunque da comprendere tutti gli insiemi decomponibili in insiemi normali (e quindi in particolare tutte le figure notevoli della geometria elementare, quali ad esempio i poligoni e i cerchi nel piano, ed ancora i poliedri, i coni, i cilindri e le sfere nello spazio

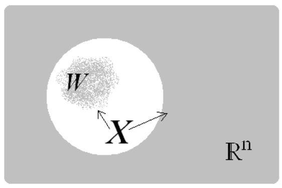
tridimen/le), e la loro misura secondo Peano-Jordan è esattamente quella a suo tempo definita per questo tipo di insiemi. Inoltre risultano misurabili in $\mathbb{R}^2$ secondo Peano-Jordan, ed hanno misura nulla, i sostegni di tutte le curve regolari, e lo stesso vale in $\mathbb{R}^3$ per i sostegni di tutte le superfici regolari.

-) Sia infine X un insieme qualsiasi, anche non limitato, di $\mathbb{R}^n$. Si dice che X è *misurabile* (*secondo Lebesgue*) se $\forall\, r \in \mathbb{R}^+$ si ha che $X \cap B_r(0) \in \mathcal{M}^*$; in tal caso si chiama *misura* (*di Lebesgue*) di X il numero $m(X) = \sup\{m^*(X \cap B_r(0))/\, r \in \mathbb{R}^+\}$. In seguito indicheremo con $\mathcal{M}$ la famiglia degli insiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$.



Si può provare che, se X è limitato, allora $X \in \mathcal{M} \;\Leftrightarrow\; X \in \mathcal{M}^*$, con $m(X) = m^*(X)$. Inoltre si dimostra che sono misurabili anche tutti gli aperti, con misura che coincide con quella a suo tempo indicata con m_a, nonché tutti i chiusi; e chiaramente questi ultimi, se limitati, hanno misura uguale a quella già denotata con m_c.
In particolare risulta $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$ e $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

Osservazione H1.3. Si potrebbe esser tentati di bypassare la fase intermedia degli insiemi limitati e dire che un insieme qualsiasi X è misurabile se $\sup \Sigma'(X) = \inf \Sigma''(X)$, con $\Sigma'(X) = \{m_c(K)/K$ compatto, $K \subseteq X\}$ e $\Sigma''(X) = \{m_a(A)/A$ aperto, $A \supseteq X\}$. Ma così facendo si potrebbero avere seri inconvenienti con gli insiemi di misura infinita.
Preso ad esempio $X = W \cup (\mathbb{R}^n \setminus B_r(0))$, con W non misurabile contenuto in $B_r(0)$, si ha evidentemente $\sup \Sigma'(X) = \inf \Sigma''(X) = +\infty$, cosicché X sarebbe misurabile; mentre invece $W = X \cap B_r(0)$ non lo è. Questi problemi spariscono se si adotta la defin/ne proposta in precedenza; infatti in base ad essa il nostro insieme X non è misurabile, dato che non lo è l'insieme $X \cap B_r(0) = W$.



Comunque si può dimostrare che, per ogni insieme misurabile X, risulta effettivamente $m(X) = \sup \Sigma'(X) = \inf \Sigma''(X)$.

•) ALCUNE PROPRIETÀ DI $\mathcal{M}$ E DI m

a) $\forall\, X', X'' \in \mathcal{M}$, se $X' \subseteq X''$, allora $m(X') \leq m(X'')$ (m è crescente).

b) Se $X, Y \in \mathcal{M}$, allora $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y \in \mathcal{M}$, ed inoltre:

b$_1$) $m(X \cup Y) \leq m(X) + m(Y)$ (m è finit/te subadditiva);
se $m(X \cap Y) < +\infty$, $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y) - m(X \cap Y)$;
se $X \cap Y = \emptyset$, $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y)$ (m è finit/te additiva);

b$_2$) se $m(X \cap Y) < +\infty$, $m(X \setminus Y) = m(X) - m(X \cap Y)$.

c) Se $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una succ/ne in $\mathcal{M}$, allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\,,\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k \in \mathcal{M}$, ed inoltre:

c₁) $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(X_k)$ (m è numer/te subadditiva);

se $X_h \cap X_k = \emptyset$ per $h \neq k$, $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(X_k)$ (m è numer/te additiva);

se $X_h \subseteq X_k$ per $h \leq k$, $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k) = \lim_{k\to\infty} m(X_k)$;

c₂) se $X_h \supseteq X_k$ per $h \leq k$ e $m(X_1) < +\infty$, $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k) = \lim_{k\to\infty} m(X_k)$ [(1)].

d) Se $Z\in\mathcal{M}$ con $m(Z) = 0$ e $X \subseteq Z$, allora $X\in\mathcal{M}$ e $m(X) = 0$ (m è completa).

e) Se $X\in\mathcal{M}$, $\overline{x}\in\mathbb{R}^n$ e $\lambda\in\mathbb{R}^+$, allora, posto $X+\overline{x} := \{x+\overline{x} \,/\, x\in X\}$ e $\lambda X := \{\lambda x \,/\, x\in X\}$, si ha che $X+\overline{x}\,, \lambda X \in \mathcal{M}$, ed inoltre $m(X+\overline{x}) = m(X)$ e $m(\lambda X) = \lambda^n m(X)$.

f) Se $X\in\mathcal{M}_p$ con $m_p(X) \neq 0$ e $Y\in\mathcal{M}_q$ con $m_q(Y) \neq 0$, allora $X\times Y \in \mathcal{M}_{p+q}$ e $m_{p+q}(X\times Y) = m_p(X)\, m_q(Y)$ [(2)]. Se $X\in\mathcal{M}_p$ con $m_p(X) = 0$, allora $\forall\, Y \subseteq \mathbb{R}^q$ si ha che $X\times Y \in \mathcal{M}_{p+q}$ e $m_{p+q}(X\times Y) = 0$ [(3)].

-) Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che contenga l'intero spazio $\mathbb{R}^n$ e che sia chiusa rispetto alle operazioni di differenza e di unione numerabile si dice essere una *σ-algebra*. Da notare che una σ-algebra risulta chiusa anche rispetto alle intersezioni numerabili; ciò discende dal fatto che, per ogni $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, vale l'uguaglianza: $\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus X_k)$.
In base alle proprietà stabilite, possiamo affermare che in $\mathbb{R}^n$ *la famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è una σ-algebra*.

Osservazione H1.4. Considerando che ogni singoletto è misurabile ed ha misura nulla, che $\mathcal{M}$ è chiuso rispetto alle unioni numerabili e che m è numer/te additiva, deduciamo che *ogni insieme numerabile X è misurabile secondo Lebesgue con* $m(X) = 0$, dato che esiste una successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di punti di $\mathbb{R}^n$ tale che $X = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_k\}$. In particolare è misurabile l'insieme $X = \mathbb{Q}^n \cap [0,1]^n$ citato nella Osserv/ne H1.2, e risulta $m(X) = 0$. Osserviamo ancora che *la frontiera ∂X di un qualsiasi insieme X è sempre misurabile*, trattandosi di un insieme chiuso; ma già nella Osserv/ne H1.2 abbiamo avuto modo di dimostrare che, anche nel caso che X sia misurabile, non è detto che la misura di ∂X debba essere necessariamente nulla.

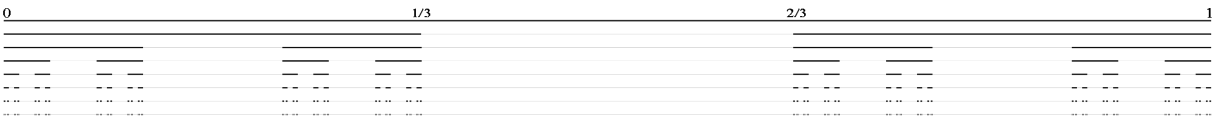
---

(1) La condizione $m(X_1) < +\infty$ non va rimossa, come mostra la succ/ne $X_k = [k, +\infty[$, $k\in\mathbb{N}$; ma può essere sostituita dalla condizione più debole che $m(X_k) < +\infty$ defin/te.
(2) Qui, per ovvie ragioni, abbiamo utilizzato il simbolo $\mathcal{M}_h$ per indicare la famiglia dei sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^h$, ed il simbolo m_h per indicare la loro misura.
(3) E' importante osservare che qui non è richiesto che Y sia misurabile. Ne consegue che, ad esmpio, l'insieme $\{0\}\times Y\in\mathcal{M}_2$ anche se $Y\notin\mathcal{M}_1$.

Esempio H1.2. Ci si può domandare se sia possibile associare ad ogni $q \in \mathbb{Q}$ un intervallo centrato in q, del tipo $I_q =]q-r_q, q+r_q[$ con $r_q \in \mathbb{R}^+$, in modo che $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} I_q \subset \mathbb{R}$. La risposta è affermativa, e può essere dimostrata usando la subadditività numerabile della misura. Il punto di partenza è che, essendo $\mathbb{Q}$ numerabile, esiste $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{Q}$ con la proprietà che $\forall\, q \in \mathbb{Q}\ \exists|\, k \in \mathbb{N}$ tale che $q = q_k$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si assume $I_k =]q_k - \frac{1}{2^{k+1}}, q_k + \frac{1}{2^{k+1}}[$; e si calcola che $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$. Poiché invece $m(\mathbb{R}) = +\infty$, si conclude che deve aversi necessariamente $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset \mathbb{R}$.

-) Concludiamo il paragrafo con un paio di esempi notevoli: nel primo viene costruito un insieme che ha misura nulla pur non essendo numerabile; nel secondo viene definito un insieme non misurabile secondo Lebesgue, il quale, come accade per tutti gli insiemi non misurabili secondo Lebesgue, è definito in maniera indiretta e non costruttiva, facendo ricorso all'assioma della scelta [(1)].

Esempio H1.3 (l'insieme ternario di Cantor). Dividiamo l'intervallo $[0,1]$ in tre parti uguali ed eliminiamo l'intervallo aperto centrale. Ciò fatto, rimane il plurintervallo $P_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, costituito da due intervalli di lunghezza $\frac{1}{3}$, cosicché $m(P_1) = \frac{2}{3}$.

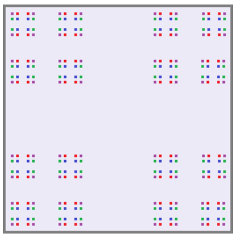


Sottoponiamo ciascuno dei due intervalli sopravvissuti allo stesso trattamento: divisione in tre parti uguali ed eliminazione dell'intervallo aperto centrale. Resta il plurintervallo $P_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, costituito da quattro intervalli di lunghezza $\frac{1}{9}$, cosicché $m(P_2) = \frac{4}{9}$. Dopo k di tali operazioni si ottiene il plurintervallo P_k, formato da 2^k intervalli di lunghezza $\frac{1}{3^k}$, cosicché $m(P_k) = (\frac{2}{3})^k$. Si chiama *insieme di Cantor* il compatto $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} P_k$, per il quale risulta, in base alla proprietà (c_2), $m(C) = \lim_{k\to\infty} m(P_k) = 0$.
Si può dimostrare che l'insieme di Cantor non è numerabile.

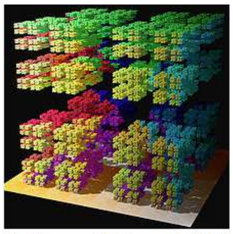
Esempio H1.4 (l'insieme di Vitali). Nell'intervallo $[0,1]$ consideriamo la relazione così definita: $x \simeq y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Si vede subito che $\simeq$ è una relazione di equivalenza, cosicché è definito l'insieme quoziente $\mathcal{A} = [0,1]/\simeq$. Dunque ogni $S \in \mathcal{A}$ è un sottoinsieme di $[0,1]$ costituito da un punto di $[0,1]$ e da tutti i punti di $[0,1]$ ad esso equivalenti. Ad esempio, uno degli elementi di $\mathcal{A}$ è l'insieme $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Grazie all'assioma della scelta, $\forall\, S \in \mathcal{A}$ è possibile scegliere un suo rappresentante $x_S \in [0,1]$. Si può dimostrare che l'insieme $X = \{x_S \,/\, S \in \mathcal{A}\}$ non è misurabile secondo Lebesgue.

---

(1) **Assioma della scelta**: *data $\{E_i / i \in I\}$, partizione di un insieme non vuoto E, esiste un insieme $F \subseteq E$ tale che, per ogni $i \in I$, $F \cap E_i$ è un singoletto; ossia esiste una funzione $\varphi : \{E_i / i \in I\} \to E$ tale che, per ogni $i \in I$, $\varphi(E_i) \in E_i$.*



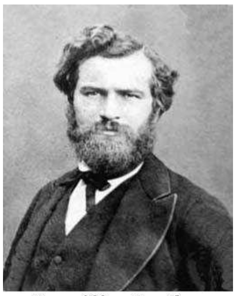
Polvere di Cantor (2D)



Polvere di Cantor (3D)

George Cantor
(1845-1918)

Bernhard Riemann
(1826-1866)



Camille Jordan
(1838-1922)

Giuseppe Peano
(1858-1932)

Henri Lebesgue
(1875-1941)

Giuseppe Vitali
(1875-1932)

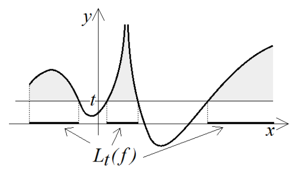
H2. Funzioni misurabili

La teoria dell'integrazione secondo Riemann ha il notevole pregio della semplicità, ma presenta alcuni inconvenienti. Tra questi ve ne sono due particolarmente importanti: il primo è che troppe funzioni, alcune anche relativamente semplici, non sono integrabili secondo Riemann; il secondo è la scarsa flessibilità dell'integrale di Riemann rispetto al passaggio al limite sotto il segno di integrale. Questi inconvenienti sono eliminati nella teoria dell'integrazione secondo Lebesgue. Essa poggia sulla teoria della misura di Lebesgue, così come l'integrazione di Riemann poggia sulla misura di Peano-Jordan.

Nel seguito, ogni volta che parleremo di misurabilità e di misura senza altre specificazioni, riterremo sottinteso il riferimento alla misura di Lebesgue. Talvolta parleremo della misura di un dato insieme E, sottintendendo soddisfatta la condizione preliminare che E sia misurabile. Inoltre diremo che una data proprietà riguardante i punti di E è verificata *quasi ovunque in* E (brev/te, *q.o. in* E), oppure *per quasi ogni* $x \in E$ (brev/te, *per q.o.* $x \in E$), se essa è verificata in $E \setminus Z$ per qualche $Z \subseteq E$ con $m(Z) = 0$, ossia se l'insieme dei punti di E nei quali non è soddisfatta ha misura nulla. Da notare che, se una proprietà è verificata $\forall\, x \in E$, allora essa è verificata anche per *q.o.* $x \in E$.

Il concetto di funzione misurabile è strettamente collegato a quello di insieme misurabile. Per ragioni che saranno chiarite più avanti, è conveniente considerare funzioni a valori in $\overline{\mathbb{R}}$, tali cioè da assumere eventualmente anche i valori $+\infty$ e $-\infty$.

Definizione H2.1. *Siano* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *misurabile ed* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. *Si dice che* f *è misurabile (in E) se* $\forall\, t \in \mathbb{R}$ *è misurabile l'insieme* $L_t(f) := \overset{-1}{f}(]t, +\infty])$.



Si osservi che nella definizione precedente si potevano utilizzare, al posto degli insiemi $L_t(f)$, i seguenti altri insiemi: $L'_t(f) := \overset{-1}{f}([t, +\infty])$ (infatti $L'_t(f) = \bigcap_{k=1}^{\infty} L_{t-\frac{1}{k}}(f)$ e $L_t(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} L'_{t+\frac{1}{k}}(f)$), $S_t(f) := \overset{-1}{f}([-\infty, t[)$ (infatti $S_t(f) = E \setminus L'_t(f)$), $S'_t(f) := \overset{-1}{f}([-\infty, t])$ (infatti $S'_t(f) = E \setminus L_t(f)$).

In seguito, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, indicheremo con $\mathcal{M}(E)$ l'insieme delle funzioni da E in $\overline{\mathbb{R}}$ misurabili. Si osserva che, se $f \in \mathcal{M}(E)$, allora, per ogni E_1 sottoinsieme misurabile di E, si ha che $f \in \mathcal{M}(E_1)$ (nel senso che $f_{|E_1} \in \mathcal{M}(E_1)$); infatti, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, risulta $L_t(f_{|E_1}) = L_t(f) \cap E_1$. Inoltre è evidente che, a causa della completezza della misura, se $m(E) = 0$, allora $\forall\, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ si ha che $f \in \mathcal{M}(E)$.

La proposizione seguente stabilisce che, se la funzione misurabile in E viene modificata su una parte di E avente misura nulla, si ottiene ancora una funzione misurabile in E.

Proposizione H2.1. *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *misurabile e siano* $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$. *Se* $f \in \mathcal{M}(E)$ *e* $f(x) = g(x)$ *per q.o.* $x \in E$, *allora anche* $g \in \mathcal{M}(E)$.

Dim. Sia $Z = \{x \in E / f(x) \neq g(x)\}$. Per ogni fissato $t \in \mathbb{R}$ si può scrivere $L_t(g) = (L_t(g) \cap Z) \cup (L_t(g) \cap (E \backslash Z)) = (L_t(g) \cap Z) \cup (L_t(f) \cap (E \backslash Z))$. A causa della completezza della misura, l'insieme $L_t(g) \cap Z$ è misurabile; poiché anche $L_t(f) \cap (E \backslash Z)$ è misurabile, si conclude che $L_t(g)$ è misurabile ■

Esempio H2.1. Dato $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e indicata con χ_X la sua funzione caratteristica, si vede che $\forall t \in \mathbb{R}$ $L_t(\chi_X)$ è uguale ad $\mathbb{R}^n$, ad X oppure a $\emptyset$ a seconda che sia $t < 0$, $0 \leq t < 1$, $t \geq 1$. Ne segue che la funzione χ_X è misurabile in $\mathbb{R}^n$ se e solo se l'insieme X è misurabile, ossia in simboli, $\chi_X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \iff X \in \mathcal{M}$.
Misurabile è anche la funzione di Dirichlet su $[0, 1]$, cioè la funzione $(\chi_{\mathbb{Q}})_{|[0,1]}$.

Esempio H2.2. Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, con $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile.
Dato $\overline{x} \in E$, è noto che f si dice *continua in* $\overline{x}$ se $\forall I \in \mathcal{I}(f(\overline{x}))$ $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall x \in B_r(\overline{x}) \cap E$ $f(x) \in I$. La continuità può essere riguardata come la somma delle semicontinuità inferiore e superiore che qui definiamo.
Diciamo che f è *semicontinua inferiormente (s c i) in* $\overline{x}$ se, $\forall t \in \mathbb{R}$ con $t < f(\overline{x})$, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\forall x \in B_r(\overline{x}) \cap E$ $f(x) > t$. In modo analogo, diciamo che f è *semicontinua superiormente (s c s) in* $\overline{x}$ se, $\forall t \in \mathbb{R}$ con $t > f(\overline{x})$, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\forall x \in B_r(\overline{x}) \cap E$ $f(x) < t$. Si riconosce subito che f è continua in $\overline{x}$ se e solo f è sia *s c i* sia *s c s* in $\overline{x}$.
E' evidente che, se $f(\overline{x}) = -\infty$, allora per forza f è *s c i* in $\overline{x}$; analogamente, se $f(\overline{x}) = +\infty$, allora per forza f è *s c s* in $\overline{x}$.
Se f è costante in $E \setminus \{\overline{x}\}$, ad esempio $f(x) = c$ $\forall x \neq \overline{x}$, con $c \in \overline{\mathbb{R}}$, allora: se $f(\overline{x}) \leq c$ si ha che f è *s c i* in $\overline{x}$; se invece $f(\overline{x}) \geq c$ si ha che f è *s c s* in $\overline{x}$. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, la funzione caratteristica $\chi_{]a,b]}$, definita in $E = \mathbb{R}^n$, è *s c i* in a e *s c s* in b. La funzione $\chi_{\mathbb{Q}}$ è *s c s* in ogni $\overline{x} \in \mathbb{Q}$ ed è *s c i* in ogni $\overline{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Sappiamo cha la funzione assegnata $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice *continua* se lo è in ogni punto di E. In modo analogo, diciamo che f è *semicontinua infer/te*, o *super/te*, se tale è rispettivamente in ogni punto di E. Si può dimostrare che f è semicontinua infer/te se e solo se $\forall t \in \mathbb{R}$ $L_t(f)$ è la traccia su E di un aperto di $\mathbb{R}^n$; analogamente f è semicontinua super/te se e solo se $\forall t \in \mathbb{R}$ $S_t(f)$ è la traccia su E di un aperto di $\mathbb{R}^n$. Ricordando che tutti i sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ sono misurabili, concludiamo che *tutte le funzioni semicontinue in E sono misurabili.*

Proposizione H2.2. *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *misurabile. Se* $f, g \in \mathcal{M}(E)$, *allora l'insieme* $L_g(f) := \{x \in E \,/\, f(x) > g(x)\}$ *è misurabile* [(1)].

Dim. E' evidente che: $x \in L_g(f) \iff \exists q \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) > q > g(x) \iff \exists q \in \mathbb{Q}$ tale che $x \in L_q(f) \cap S_q(g)$. Con ciò è provato che $L_g(f) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (L_q(f) \cap S_q(g))$, cosicché l'insieme $L_g(f)$ è misurabile in quanto unione numerabile di insiemi misurabili.

[(1)] Ne segue che sono misurabili anche $L'_g(f) := \{x \in E \,/\, f(x) \geq g(x)\} = E \setminus L_f(g)$ e $U_g(f) := \{x \in E \,/\, f(x) = g(x)\} = L'_g(f) \cap L'_f(g)$.

Nel punto (g) della proposizione seguente compariranno le funzioni $\liminf\limits_{k\to+\infty} f_k$ e $\limsup\limits_{k\to+\infty} f_k$, rispettivamente limite inferiore e limite superiore della successione di funzioni $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. A tal proposito ricordiamo che ad ogni $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione di elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ è possibile associare la successione $(\inf\limits_{i\geq k} a_i)_{k\in\mathbb{N}}$, anch'essa costituita da elementi di $\overline{\mathbb{R}}$, la quale risulta crescente e quindi regolare; e si chiama *limite inferiore* o *minimo limite* della successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ il valore $\liminf\limits_{k\to+\infty} a_k := \lim\limits_{k\to\infty}(\inf\limits_{i\geq k} a_i) = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\inf\limits_{i\geq k} a_i$. In modo analogo, scambiando fra loro le operazioni di inf e sup, è definito il *limite superiore*, detto anche *massimo limite*, indicato con $\limsup\limits_{k\to+\infty} a_k$. E' noto che $\liminf\limits_{k\to+\infty} a_k \leq \limsup\limits_{k\to+\infty} a_k$, e che l'uguaglianza sussiste se e solo se la successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è regolare, nel qual caso risulta $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \liminf\limits_{k\to+\infty} a_k = \limsup\limits_{k\to+\infty} a_k$. Se poi $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni da $E\subseteq\mathbb{R}^n$ in $\overline{\mathbb{R}}$, si chiamano *limite inferiore* e *limite superiore* di $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ le funzioni che ad ogni $x\in E$ associano rispettivamente il $\liminf\limits_{k\to+\infty} f_k(x)$ ed il $\limsup\limits_{k\to+\infty} f_k(x)$.

Proposizione H2.3. *Sia $E\subseteq\mathbb{R}^n$ misurabile.*

a) *Se $f\in\mathcal{M}(E)$ e $c\in\mathbb{R}$, allora $f+c\,, cf$*[1] *$\in\mathcal{M}(E)$.*

b) *Se $f,g\in\mathcal{M}(E)$ e $\forall x\in E\;\; f(x)+g(x)\neq\infty-\infty$, allora $f+g\in\mathcal{M}(E)$.*

c) *Se $f,g\in\mathcal{M}(E)$ e $\forall x\in E\;\; f(x)\,g(x)\neq 0\,\infty$, allora $f\,g\in\mathcal{M}(E)$.*

d) *Se $f\in\mathcal{M}(E)$ e $\forall x\in E\;\; f(x)\neq 0$, allora $\frac{1}{f}$*[2] *$\in\mathcal{M}(E)$.*

e) *Se $f\in\mathcal{M}(E)$, allora $f^+, f^-, |f|\in\mathcal{M}(E)$.*

f) *Se $\forall k\in\mathbb{N}\;\; f_k\in\mathcal{M}(E)$, allora $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k\,, \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k\in\mathcal{M}(E)$.*

g) *Se $\forall k\in\mathbb{N}\;\; f_k\in\mathcal{M}(E)$, allora $\liminf\limits_{k\to+\infty} f_k\,, \limsup\limits_{k\to+\infty} f_k\in\mathcal{M}(E)$.*

Dim. (a). Basta osservare che, $\forall t\in\mathbb{R}$, risulta $L_t(f+c)=L_{t-c}(f)$; ed ancora, per $c\neq 0$, $L_t(cf)=L_{t/c}(f)$ se $c>0$ e $L_t(cf)=S_{t/c}(f)$ se $c<0$.

Dim. (b). Basta osservare che, $\forall t\in\mathbb{R}$, $L_t(f+g)=L_{t-g}(f)$, e tener conto della Propos/ne H2.2 e del fatto che $t-g\in\mathcal{M}(E)$ in virtù della (a) già provata.

Dim. (c). Prima osserviamo che, se $h\in\mathcal{M}(E)$, allora $h^2\in\mathcal{M}(E)$, in quanto, $\forall t\in\mathbb{R}$, risulta $L_t(h^2)=S_{-\sqrt{t}}(h)\cup L_{\sqrt{t}}(h)$ per $t\geq 0$ e $L_t(h^2)=E$ per $t<0$. Ciò fatto, basta osservare che $fg=\frac{1}{4}((f+g)^2-(f-g)^2)$ e tener conto dei punti (a) e (b) già provati.

Dim. (d). Basta osservare che: se $t>0$ $\;L_t(\frac{1}{f})=L_0(f)\cap S_{1/t}(f)$, se $t=0$ $\;L_t(\frac{1}{f})=L_t(f)$, se $t<0$ $\;L_t(\frac{1}{f})=L_0(f)\cup S_{1/t}(f)$.

Dim. (e). Poiché, $\forall t\in\mathbb{R}$, $L_t(|f|)=L_t(f)\cup S_{-t}(f)$ se $t\geq 0$ e $L_t(|f|)=E$ se $t<0$, si ha che $|f|\in\mathcal{M}(E)$. Da qui segue, tenendo conto dei punti (a) e (b) già provati e delle uguaglianze $f^+=\frac{1}{2}(|f|+f)$ e $f^-=\frac{1}{2}(|f|-f)$, che $f^+, f^-\in\mathcal{M}(E)$.

---

[1] Si conviene che cf è la funzione ovunque nulla su E se $c=0$.

[2] Si conviene che $\frac{1}{f(x)}=0$ se $f(x)=+\infty$ o $f(x)=-\infty$.

Dim. (f). Posto $\varphi = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ e $\psi = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$, basta osservare che, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $S_t(\varphi) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} S_t(f_k)$ e $L_t(\psi) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} L_t(f_k)$.
Dim. (g). Basta ricordare come sono definiti $\liminf\limits_{k\to+\infty} f_k$ e $\limsup\limits_{k\to+\infty} f_k$, e tener conto della proprietà (f) già provata ∎

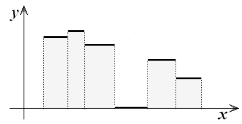
A proposito delle proprietà (f) e (g) della proposizione precedente, osserviamo che le funzioni $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\liminf\limits_{k\to+\infty} f_k$ e $\limsup\limits_{k\to+\infty} f_k$ che in esse compaiono possono assumere valori infiniti anche quando le funzioni f_k assumono soltanto valori finiti. E' proprio qui che si vede l'utilità di considerare funzioni a valori in $\overline{\mathbb{R}}$: se avessimo limitato la trattazione alle funzioni con valori reali, per enunciare le proprietà suddette avremmo dovuto richiedere la condizione di limitatezza alla successione $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ $\forall\, x \in E$.

Osserviamo inoltre che, a causa della proprietà (g), se la successione di funzioni misurabili $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ammette in E limite puntuale, allora $\lim\limits_{k\to\infty} f_k \in \mathcal{M}(E)$. In altri termini, l'insieme $\mathcal{M}(E)$ risulta chiuso rispetto alla convergenza puntuale.

H3. L'integrale di Lebesgue

Una classe importante di funzioni misurabili è rappresentata dalle cosiddette funzioni semplici, dalle quali si parte per definire il concetto di integrale secondo Lebesgue.

Definizione H3.1. *Dati $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile ed $s\colon E \to [0,+\infty[$, si dice che s è una funzione semplice (non negativa) se l'insieme $s(E)$ è finito e $\forall\, c \in s(E)$ l'insieme $s^{-1}(\{c\})$ è misurabile.*



Nel caso $n = 1$, un esempio di funzione semplice dall'aspetto tutt'altro che semplice è la funzione di Dirichlet $(\chi_{\mathbb{Q}})_{|[0,1]}$.
Ogni funzione semplice s si può rappresentare in termini di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili; infatti, se $c_1, c_2, \ldots, c_h$ sono gli elementi di $s(E)$, allora, posto, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, h$, $C_i = s^{-1}(\{c_i\})$, risulta $s = \sum\limits_{i=1}^{h} c_i (\chi_{C_i})_{|E}$. Da qui si deduce che ogni funzione semplice è misurabile.
D'altra parte si può dimostrare che ogni funzione misurabile non negativa può essere approssimata mediante funzioni semplici, così come stabilisce la proposizione seguente.

Proposizione H3.1. *Assegnati l'insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e la funzione misurabile $f : E \to [0,+\infty]$, esiste una successione crescente $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici in E tale che $f = \lim\limits_{k\to\infty} s_k$.*

E' evidente che la restrizione della funzione semplice s ad un qualsiasi sottoinsieme misurabile di E è ancora una funzione semplice. Indicato con $\mathcal{S}^+(E)$ l'insieme delle funzioni semplici definite in E, si riconosce che esso è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per un numero reale non negativo.

Definizione H3.2. *Dati* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *misurabile ed* $s \in \mathcal{S}^+(E)$, *si chiama integrale di* s *(esteso ad* E*), e lo si indica con* $\int_E s(x)\,\mathrm{d}x$, *il valore* $\sum_{i=1}^{h} c_i\, m(C_i)$, *dove* $c_1, c_2, \ldots, c_h$ *sono gli elementi di* $s(E)$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, h$ $C_i = s^{-1}(\{c_i\})$, *e il prodotto* $c_i\, m(C_i)$ *è inteso uguale a 0 se* $c_i = 0$.

Si osserva che l'integrale di s è compreso fra 0 e $+\infty$; esso vale 0 se e solo se s è nulla *q.o.* in E, e vale $+\infty$ se e solo se per qualche $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$ $c_i \neq 0$ e $m(C_i) = +\infty$. Ad esempio, nel caso $E = \mathbb{R}$, se $s = \chi_{\mathbb{Q}}$ e $t = \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, allora $s, t \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ e risulta $\int_{\mathbb{R}} s(x)\,\mathrm{d}x = 0$ e $\int_{\mathbb{R}} t(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$.
Un altro caso notevole è quello in cui s è costante in E: si riconosce che, per ogni $c \in \mathbb{R}^+$, $\int_E c\,\mathrm{d}x = c\, m(E)$; da ciò segue che $m(E) = \int_E \mathrm{d}x$.

-) Delle varie proprietà dell'integrale delle funzioni semplici citiamo solo quelle che avremo bisogno di richiamare in seguito:

s1) *se* $s \in \mathcal{S}^+(E)$ *e* $c \in \mathbb{R}^+$, *allora* $\int_E c\, s(x)\,\mathrm{d}x = c \int_E s(x)\,\mathrm{d}x$;

s2) *se* $s, t \in \mathcal{S}^+(E)$, *allora* $\int_E (s(x) + t(x))\,\mathrm{d}x = \int_E s(x)\,\mathrm{d}x + \int_E t(x)\,\mathrm{d}x$;

s3) *se* $s \in \mathcal{S}^+(E)$ *e* $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *è una successione crescente di sottoinsiemi misurabili di* E *tali che* $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$, *allora* $\int_E s(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} s(x)\,\mathrm{d}x$.

•) A questo punto possiamo definire l'integrale di Lebesgue delle funzioni misurabili in E ed ivi non negative, il cui insieme indicheremo con $\mathcal{M}^+(E)$.

Definizione H3.3. *Dati* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *misurabile ed* $f \in \mathcal{M}^+(E)$, *si chiama integrale di* f *(esteso ad* E*), e lo si indica con* $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$, *il* $\sup\{\int_E s(x)\,\mathrm{d}x \,/ s \in \mathcal{S}^+(E),\ s \leq f\}$.

E' facile riconoscere che, se $f \in \mathcal{S}^+(E)$, l'integrale di f qui definito coincide con l'integrale di f intesa come funzione semplice.

Osservazione H3.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato e misurabile secondo Peano-Jordan, e sia $f : E \to \mathbb{R}$ limitata. Inoltre qui supponiamo f non negativa. L'integrabilità e l'integrale secondo Riemann di f su E vengono definiti mediante le somme inferiori e le somme superiori: indicato con $\Pi(E)$ l'insieme delle partizioni di E costituite da un numero finito di insiemi misurabili secondo Peano-Jordan, per ogni $\mathcal{D} = \{E_1, E_2, \ldots, E_h\} \in \Pi(E)$ si pone $s'(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{h} \inf_{E_i} f\, \tilde{m}(E_i)$ e $s''(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{h} \sup_{E_i} f\, \tilde{m}(E_i)$; se accade che $\sup\{s'(f, \mathcal{D}) \,/ \mathcal{D} \in \Pi(E)\} = \inf\{s''(f, \mathcal{D}) \,/ \mathcal{D} \in \Pi(E)\}$, si dice che f è *integrabile secondo Riemann* e si chiama *integrale di* f il valore comune dei due estremi.
Si vede facilmente che le somme inferiori e superiori della teoria di Riemann sono gli integrali di particolari funzioni semplici della teoria di Lebesgue. Sulla base di questa

osservazione si può provare che, *se f è integrabile secondo Riemann, allora f è integrabile anche secondo Lebesgue e l'integrale di Lebesgue di f coincide con quello di Riemann*[(1)].
D'altra parte esistono funzioni limitate su insiemi limitati e misurabili secondo Peano-Jordan che sono integrabili nella teoria di Lebesgue ma non in quella di Riemann; l'esempio più semplice è quello della funzione di Dirichlet sull'intervallo [0,1].
La caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann è stabilita dal Teorema di Vitali-Lebesgue: *una funzione limitata su un insieme limitato e misurabile secondo Peano-Jordan è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla secondo Lebesgue.* In base a questo teorema possiamo dire, sia pure in forma grossolana, che l'integrabilità secondo Riemann è incompatibile con la presenza di "troppi" punti di discontinuità, ed è sorprendente il fatto che la soglia di tolleranza è stabilita proprio con la misura di Lebesgue.

-) Riportiamo qui di seguito un primo gruppo di proprietà dell'integrale di Lebesgue:

a) *se* $f \in \mathcal{M}^+(E)$ *e* $c \in \mathbb{R}^+$, *allora* $\int_E cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ *;*

b) *se* $f, g \in \mathcal{M}^+(E)$ *e* $\forall\, x \in E \;\; f(x) \leq g(x)$, *allora* $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_E g(x)\,\mathrm{d}x$ *;*

c) *se* $f \in \mathcal{M}^+(E)$ *ed* E_1 *è un sottoinsieme misurabile di* E, *allora* $\int_{E_1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ *;*

d) *se* $f \in \mathcal{M}^+(E)$, *allora* $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) = 0$ *per q.o.* $x \in E$ *;*

e) *se* $f \in \mathcal{M}^+(E)$ *e* $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$, *allora* $f(x) < +\infty$ *per q.o.* $x \in E$ *;*

f) *se* $m(E) = 0$, *allora* $\forall\, f : E \to [0, +\infty]$ *si ha che* $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Altre importanti proprietà, tra cui l'additività rispetto alla funzione integranda e quella rispetto al dominio di integrazione, saranno viste più avanti, dopo che avremo trattato il teorema seguente, che ne rende più facile la dimostrazione. Il teorema annunciato costituisce un primo importante risultato sul passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Teorema H3.2 (di Beppo Levi o della convergenza monotona). *Dati* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *misurabile ed* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathcal{M}^+(E)$ *crescente, si ha che* $\int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Dim. Osserviamo anzitutto che ambedue i membri dell'uguaglianza hanno significato: la funzione limite che compare a primo membro esiste grazie alla crescenza della successione $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, è funzione non negativa, ed è misurabile in E in conseguenza della proprietà (g) di Propos/ne H2.3; il limite a secondo membro esiste grazie al fatto che la successione $(\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x)_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente, come assicura la proprietà (b).

---

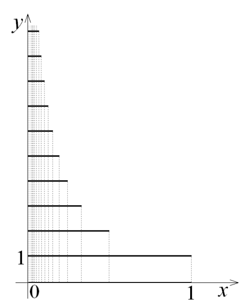
(1) In verità qui va precisato che l'espressione "f integrabile secondo Lebesgue" non è stata ancora introdotta, ma, quando lo faremo, avremo modo di osservare che, nel caso di funzioni non negative, l'integrabilità secondo Lebesgue coincide con la già nota misurabilità.

Posto $f = \lim_{k\to\infty} f_k$, ancora per la ($\underline{\mathrm{b}}$) risulta, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\int_E f_k(x)\, dx \le \int_E f(x)\, \mathrm{d}x$, da cui segue che $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\, \mathrm{d}x \le \int_E f(x)\, \mathrm{d}x$.
Per provare l'altra disuguaglianza, ricordiamo che $\int_E f(x)\, \mathrm{d}x = \sup\{\int_E s(x)\, \mathrm{d}x \,/ s \in \mathcal{S}^+(E),\ s \le f\}$, e consideriamo appunto $s \in \mathcal{S}^+(E)$ tale che $s \le f$. Fissato $\alpha \in]0,1[$ e posto, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $E_k = L_{\alpha s}(f_k)$, in virtù della Propos/ne H2.2 si ha che E_k è misurabile; inoltre, per la crescenza della succ/ne $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, si ha che $E_k \subseteq E_{k+1}$; infine risulta $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$, dato che, preso $x \in E$, se fosse $x \notin E_k\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, ossia $f_k(x) \le \alpha s(x)\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, si avrebbe $f(x) \le \alpha s(x)$, da cui $f(x) < s(x)$, che è falso. Tenendo conto delle proprietà ($\underline{\mathrm{c}}$), ($\underline{\mathrm{b}}$) e (s_1) risulta, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\int_E f_k(x)\, \mathrm{d}x \ge \int_{E_k} f_k(x)\, \mathrm{d}x \ge \alpha \int_{E_k} s(x)\, \mathrm{d}x$; da ciò segue, passando al limite per $k \to +\infty$ e tenendo conto della (s_3), che $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\, \mathrm{d}x \ge \alpha \int_E s(x)\, \mathrm{d}x$, da cui ancora si ricava, passando al limite per $\alpha \to 1$, che $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\, \mathrm{d}x \ge \int_E s(x)\, \mathrm{d}x$. Si conclude, grazie all'arbitrarietà di s, che $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\, \mathrm{d}x \ge \int_E f(x)\, \mathrm{d}x$ ■

Teorema H3.3 (lemma di Fatou). *Dati $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile ed $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathcal{M}^+(E)$, si ha che $\int_E \liminf_{k\,\to\,+\infty} f_k(x)\, \mathrm{d}x \le \liminf_{k\,\to\,+\infty} \int_E f_k(x)\, \mathrm{d}x$.*

Dim. Osserviamo anzitutto che l'integrale a primo membro è definito, poichè la funzione non negativa $\liminf_{k\,\to\,+\infty} f_k$ è misurabile in E in virtù della proprietà (g) di Propos/ne H2.3. Si riconosce, tenendo conto della (f) di Propos/ne H2.3, che $(\inf_{i\ge k} f_i)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente in $\mathcal{M}^+(E)$, e quindi per il teorema di B. Levi risulta $\int_E \liminf_{k\,\to\,+\infty} f_k(x)\, \mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} \inf_{i\ge k} f_i(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E \inf_{i\ge k} f_i(x)\, \mathrm{d}x$. Si osserva poi che, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, da $\inf_{i\ge k} f_i \le f_j$ $\forall\, j \ge k$ segue, in virtù della ($\underline{\mathrm{b}}$), che $\int_E \inf_{i\ge k} f_i(x)\, \mathrm{d}x \le \int_E f_j(x)\, \mathrm{d}x\ \ \forall\, j \ge k$, e dunque $\int_E \inf_{i\ge k} f_i(x)\, \mathrm{d}x \le \inf_{i\ge k} \int_E f_i(x)\, \mathrm{d}x$. Da qui, passando al limite per $k \to +\infty$, si ha che $\lim_{k\to\infty} \int_E \inf_{i\ge k} f_i(x)\, \mathrm{d}x \le \liminf_{k\,\to\,+\infty} \int_E f_k(x)\, \mathrm{d}x$ ■

Osservazione H3.2. Consideriamo, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, la funzione $f_k :]0,1[\to \mathbb{R}$ definita da $f_k(x) = \begin{cases} k & \text{se } 0 < x < 1/k \\ 0 & \text{se } 1/k \le x < 1 \end{cases}$. Si vede che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{M}^+(\,]0,1[\,)$, anzi in $\mathcal{S}^+(\,]0,1[\,)$, e che converge in $]0,1[$ alla funzione f definita da $f(x) = 0\ \ \forall\, x \in]0,1[$. Inoltre $\forall\, k \in \mathbb{N}$ si ha $\int_{]0,1[} f_k(x)\, \mathrm{d}x = 1$. Dunque $\int_{]0,1[} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\, \mathrm{d}x \ne \lim_{k\to\infty} \int_{]0,1[} f_k(x)\, \mathrm{d}x$.



Ciò dimostra che nel teorema di B. Levi non è possibile rinunciare all'ipotesi di crescenza della successione $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Lo stesso esempio dimostra anche che nella tesi del lemma di Fatou non è possibile sostituire la disuguaglianza con la corrispondente uguaglianza.

Il teorema seguente stabilisce l'additività dell'integrale, sia finita sia numerabile, rispetto alla funzione integranda.

Teorema H3.4. *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *misurabile. Data* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *successione in* $\mathcal{M}^+(E)$*, si ha:* $\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Dim. Proviamo dapprima che l'uguaglianza vale per somme finite, e a tale scopo basta considerare il caso di due sole funzioni. Siano dunque $f_1, f_2 \in \mathcal{M}^+(E)$; e siano $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ due successioni crecenti di funzioni semplici in E tali che $\lim_{k\to\infty} s_k = f_1$ e $\lim_{k\to\infty} t_k = f_2$, la cui esistenza è assicurata dalla Propos/ne H3.1. Applicando due volte il teorema di B. Levi e tenendo conto della proprietà (s_2), si ha che $\int_E (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} (s_k(x) + t_k(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E (s_k(x) + t_k(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E s_k(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{k\to\infty} \int_E t_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} s_k(x)\,\mathrm{d}x + \int_E \lim_{k\to\infty} t_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

Tornando al caso generale, osserviamo anzitutto che la funzione $f := \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} f_i$ è non negativa e, in virtù di (b) e (g) di Propos/ne H1.2, essa è misurabile. Applicando il teorema di B. Levi alla successione, crescente, delle somme parziali e tenendo conto dell'additività finita già dimostrata, si ricava che $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} f_i(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E \sum_{i=1}^{k} f_i(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \int_E f_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x$ ∎

L'uguaglianza $\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x$ non è altro che la cosiddetta "integrazione per serie", o "integrazione termine a termine". Assumendo in essa $f_k = 0$ $\forall\, k \geq 3$ si ottiene il caso particolare $\int_E (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

Altre proprietà dell'integrale sono enunciate nella proposizione seguente.

Proposizione H3.5. *Siano* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *misurabile ed* $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *successione di sottoinsiemi misurabili di* E *tali che* $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ *; sia inoltre* $f \in \mathcal{M}^+(E)$.

a) *Se,* $\forall\, h, k \in \mathbb{N}$ *con* $h \neq k$, $E_h \cap E_k = \emptyset$*, allora* $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) *Se,* $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $E_k \subseteq E_{k+1}$*, allora* $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Nella proposizione precedente la proprietà (a) esprime l'additività rispetto all'insieme di integrazione. Assumendo in essa $E_k = \emptyset$ $\forall\, k \geq 3$ si ottiene il seguente caso particolare: dati $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabili e disgiunti e data $f \in \mathcal{M}^+(E_1 \cup E_2)$, si ha che $\int_{E_1\cup E_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{E_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Osservazione H3.3. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile ed $E_0 \subseteq E$ con $m(E_0) = 0$. Considerata $f \in \mathcal{M}^+(E)$, dalla proposizione precedente segue, tenendo conto della ($\underline{\mathrm{f}}$), che $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{E\setminus E_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{E\setminus E_0} f(x)\,\mathrm{d}x$. Quindi *l'integrale di Lebesgue non cambia se l'insieme di integrazione viene diminuito di un insieme di misura nulla.* Ciò implica a sua volta che *l'integrale non cambia se la funzione integranda viene modificata su un insieme di misura nulla.*

Infine è evidente che *un'altra libertà che ci si può permettere senza alterare il valore dell'integrale è quella di aumentare l'insieme di integrazione aggiungendogli un insieme di misura nulla*, nei punti del quale la funzione può intendersi prolungata mediante assegnazione di valori arbitrari.

Questa osservazione consente di indebolire le ipotesi di molti risultati riguardanti l'integrale di Lebesgue, e quindi di estenderne l'efficacia. Ad esempio, il teorema di B. Levi resta valido se la condizione che la successione $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sia crescente in tutti i punti di E viene sostituita dalla condizione che essa sia crescente nei punti di $E \setminus E_0$, con $E_0 \subseteq E$ e $m(E_0) = 0$ [(1)].

-) Gli esempi che seguono riguardano funzioni di una sola variabile. A tal proposito conviene introdurre alcune notazioni.

Dati $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a < b$, se I è uno qualunque degli intervalli di estremi a e b, scriveremo solitamente $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ invece che $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

Data $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}$, useremo spesso il simbolo $[\varphi(x)]_a^b$ nel significato di $\lim_{h\to\infty} \varphi(b - \frac{1}{h}) - \varphi(a)$ se $b \in \mathbb{R}$ e nel significato di $\lim_{h\to\infty} \varphi(h) - \varphi(a)$ se $b = +\infty$. Analoghe considerazioni vanno estese al caso dell'intervallo $]a, b]$ e al caso dell'intervallo $]a, b[$.

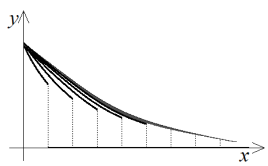
Infine anche qui intenderemo $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Esempio H3.1. Calcoliamo $\lim_{k\to\infty} k \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{k^4x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

Poniamo, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $f_k(x) = \frac{k}{\sqrt[4]{k^4x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1/k^4}}$, $x \in]0, 1[$.

Si riconosce che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente in $\mathcal{M}^+(]0, 1[)$, il cui limite è la funzione f definita da $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in]0, 1[$. Tenendo conto del teorema di B. Levi si calcola: $\lim_{k\to\infty} k \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{k^4x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2.$

Esempio H3.2. Calcoliamo $\lim_{k\to\infty} \int_0^k (1 + \frac{x}{k})^k\, \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.



Si osserva che nell'integrale la dipendenza da k non riguarda soltanto la funzione integranda ma anche l'intervallo di integrazione.

Poniamo, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $f_k(x) = (1 + \frac{x}{k})^k\, \mathrm{e}^{-2x} \chi_{[0,k]}(x)$, $x \in [0, +\infty[$.

Riconosciamo che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una succ/ne crescente in $\mathcal{M}^+([0, +\infty[)$, il cui limite è la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $x \in [0, +\infty[$. Si calcola: $\lim_{k\to\infty} \int_0^k (1 + \frac{x}{k})^k\, \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_0^k f_k(x)\,\mathrm{d}x =$ $\langle$ per la (a) di Propos/ne H3.5 $\rangle$ $= \lim_{k\to\infty} \int_0^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x =$ $\langle$ per il teorema di B. Levi $\rangle$ $= \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} = 1.$

---

(1) Si riconosce facilmente che la condizione "$\exists\, E_0 \subseteq E$, con $m(E_0) = 0$, t.c. $\forall\, x \in E \setminus E_0$ e $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $f_k(x) \le f_{k+1}(x)$" equivale alla condizione "$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, E_k \subseteq E$, con $m(E_k) = 0$, t.c. $\forall\, x \in E \setminus E_k$ $f_k(x) \le f_{k+1}(x)$".

Esempio H3.3. Calcoliamo $\int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.
Poniamo, $\forall\, k \in \mathbb{N}_o$, $f_k(x) = -x^{2k}\log x$, $x \in]0,1[$. Si vede che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_o}$ è una successione in $\mathcal{M}^+(]0,1[)$ e che $\forall\, x\in]0,1[\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \frac{\log x}{x^2-1}$. Tenendo conto del Teorema H3.4 e del punto (b) di Propos/ne H3.5 si calcola: $\int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2k}\log x\,\mathrm{d}x = \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty}[\,\frac{1}{(2k+1)^2}\,x^{2k+1} - \frac{1}{2k+1}\,x^{2k+1}\log x\,]_0^1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Esempio H3.4. Calcoliamo $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$.
Poniamo, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $f_k(x) = xe^{-kx}$, $x \in]0,+\infty[$. Si vede che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{M}^+(]0,+\infty[)$ e che $\forall\, x \in]0,+\infty[\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \frac{x\,e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x-1}$. Tenendo conto del Teorema H3.4 si calcola: $\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} x\,e^{-kx}\,\mathrm{d}x = \ldots = -\sum\limits_{k=1}^{\infty}[(\frac{1}{k}x + \frac{1}{k^2})e^{-kx}]_0^{+\infty} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

•) Passiamo ora a definire l'integrale di Lebesgue per funzioni di segno qualsiasi. Osserviamo preliminarmente che, dati $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile ed $f \in \mathcal{M}(E)$, gli integrali $\int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x$ hanno significato, dato che le funzioni non negative $f^+, f^-, |f|$ risultano misurabili in virtù della (e) di Propos/ne H2.3.

Definizione H3.4. *Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e data $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, si dice che f è integrabile (in E) se $f \in \mathcal{M}(E)$ e risulta $\int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$ oppure $\int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$; in tal caso si pone $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x$. Se poi risulta $\int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$ e $\int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$, si dice che f è sommabile (in E).*

Osserviamo che, *se f è misurabile in E, la condizione che gli integrali $\int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x$ siano entrambi finiti equivale alla condizione che sia finito l'integrale $\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x$* ; ciò è dovuto al fatto che $|f| = f^+ + f^-$, da cui segue che $\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x$, ed al fatto che $f^+ \leq |f|$ e $f^- \leq |f|$, da cui segue che $\int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x$ e $\int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
Osserviamo ancora che, *data $f : E \to [0,+\infty]$, se f è misurabile allora essa è automaticamente anche integrabile* (dato che si avrebbe $\int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x = 0 < +\infty$), *e l'integrale di f qui definito coincide con quello già noto per le funzioni di $\mathcal{M}^+(E)$.*

Il teorema di B. Levi e il lemma di Fatou si possono estendere alle funzioni misurabili di segno qualsiasi. Ne diamo qui di seguito una formulazione molto generale.

Proposizione H3.6. *Siano: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni integrabili in E tali che $\forall\, k\in\mathbb{N}\ f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ per q.o. $x\in E$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ per q.o. $x\in E$. Se $\int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$, allora f è integrabile in E e $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x$.*

Per ciò che riguarda la dim/ne, osserviamo che f è integrabile in E in quanto, essendo $f \geq f_1$ *q.o.* in E, risulta $f^- \leq f_1^-$ *q.o.* in E e quindi $\int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_E f_1^-(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$; e per il resto (a parte il caso banale in cui $\int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$) ci limitiamo a dire che andrebbe applicato il teorema di B. Levi alla succ/ne $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dove, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $g_k = f_k - f_1$.
Osserviamo che all'ipotesi $\int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$ non si può rinunciare, come prova la successione delle funzioni f_k definite da $f_k(x) = -\frac{1}{k}$, $x\in\mathbb{R}$.
Aggiungiamo infine che la tesi sussiste anche se le ipotesi "$f_k \leq f_{k+1}$ *q.o. in* E" e "$\int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$" vengono scambiate rispettivamente con le ipotesi duali "$f_k \geq f_{k+1}$ *q.o. in* E" e "$\int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$".

Proposizione H3.7. *Siano:* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *misurabile,* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *successione di funzioni integrabili in* E, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *tale che* $f(x) = \liminf\limits_{k\to+\infty} f_k(x)$ *per q.o.* $x \in E$. *Se esiste* φ *integrabile in E con* $\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$ *e tale che* $\forall\, k\in\mathbb{N}$ $f_k(x) \geq \varphi(x)$ *per q.o.* $x\in E$, *allora* f *è integrabile in* E *e* $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \leq \liminf\limits_{k\to+\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Per ciò che riguarda la dim/ne, osserviamo che f è integrabile in E in quanto, essendo $f \geq \varphi$ *q.o.* in E, risulta $f^- \leq \varphi^-$ *q.o.* in E e quindi $\int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_E \varphi^-(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$; e per il resto (a parte il caso banale in cui $\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$) anche qui ci limitiamo a dire che andrebbe applicato il lemma di Fatou alla succ/ne $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dove, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $g_k = f_k - \varphi$.
Osserviamo che all'ipotesi dell'esistenza di una φ con le proprietà suddette non si può rinunciare, come prova la successione delle funzioni f_k definite da $f_k(x) = -\frac{1}{k}$, $x\in\mathbb{R}$.
Aggiungiamo infine che la proposizione sussiste anche in versione duale: se le ipotesi "$\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$" e "$f_k \geq \varphi$ *q.o. in* E" vengono scambiate rispettivamente con le ipotesi "$\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$" e "$f_k \leq \varphi$ *q.o. in* E", si arriva a concludere che, *data* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *tale che* $f(x) = \limsup\limits_{k\to+\infty} f_k(x)$ *per q.o.* $x \in E$, *allora* f *è integrabile in* E *e* $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \geq \limsup\limits_{k\to+\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

-) Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, sia $\mathcal{L}(E)$ l'insieme delle funzioni da E in $\overline{\mathbb{R}}$ sommabili.
Si riconosce che *tutte le funzioni misurabili e limitate su insiemi misurabili limitati sono sommabili*. Invero, da $|f(x)| \leq M$ $\forall\, x \in E$, con $M \in \mathbb{R}^+$ ed E misurabile e limitato, segue che $\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq M \int_E \mathrm{d}x = M\, m(E) < +\infty$.
Si osserva inoltre che, *se* $f\in\mathcal{L}(E)$, *allora* $f\in\mathcal{L}(E_1)$ *per ogni insieme misurabile* $E_1 \subseteq E$.

Riportiamo ora alcune proprietà delle funzioni sommabili e dei relativi integrali:

a) *se* $f \in \mathcal{L}(E)$, *allora* $f(x) \in \mathbb{R}$ *per q.o.* $x\in E$;

b) *se* $f \in \mathcal{L}(E)$ *e* $c\in\mathbb{R}$, *allora* $c\,f \in \mathcal{L}(E)$ [(1)] *e* $\int_E c\,f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$;

[(1)] Se $c = 0$, con cf si intenda la funzione definita in E di costante valore 0.

c) *se* $f, g \in \mathcal{L}(E)$, *allora* $f+g \in \mathcal{L}(E)$ [1] *e* $\int_E (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g(x)\,\mathrm{d}x$ *;*

d) *se* $f, g \in \mathcal{L}(E)$ *e per q.o.* $x \in E$ $f(x) \leq g(x)$, *allora* $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_E g(x)\,\mathrm{d}x$ *;*

e) *se* $f \in \mathcal{L}(E)$, *allora* $|\int_E f(x)\,\mathrm{d}x| \leq \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x$ *;*

f) *se* $m(E) = 0$, *allora* $\forall\, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *si ha che* $f \in \mathcal{L}(E)$ *e* $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *;*

g) *se* $f \in \mathcal{L}(E)$ *ed* $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *è una successione di sottoinsiemi misurabili di* E *a due a due disgiunti e tali che* $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, *allora* $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x$ *;*

h) *se* $f \in \mathcal{L}(E)$ *ed* $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *è una successione crescente di sottoinsiemi misurabili di* E *tali che* $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, *allora* $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x$ *;*

i) *se* $f \in \mathcal{L}(E)$, *allora* $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ $\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+$ *tale che* $\forall\, F \subseteq E$ *con* $m(F) < \delta$ *risulta* $\int_F |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$ (*assoluta continuità dell'integrale*).

Il teorema seguente individua un'altra condizione, anch'essa poco restrittiva, nella quale è consentito il passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Teorema H3.8 (di Lebesgue o della convergenza dominata). *Siano:* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *misurabile,* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *succ/ne in* $\mathcal{L}(E)$[2] *convergente q.o. in* E, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *t.c.* $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ *per q.o.* $x \in E$. *Se esiste* $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ *t.c.* $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $|f_k(x)| \leq \varphi(x)$ *per q.o.* $x \in E$, *allora* $f \in \mathcal{L}(E)$ *ed inoltre* $\exists \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dim. Grazie alla (g) di Propos/ne H2.3 sappiamo che f è misurabile in E; inoltre f è sommabile in E in quanto, essendo $|f| \leq \varphi$ *q.o.* in E, risulta $\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x$. In conseguenza della propos/ne precedente e della sua duale si ha che $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \liminf_{k\to+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \leq \limsup_{k\to+\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_E \limsup_{k\to+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$. Pertanto $\liminf_{k\to+\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \limsup_{k\to+\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$, che è quanto restava da provare ∎

Osserviamo che, nel teorema, all'ipotesi di esistenza della dominante sommabile φ non si può rinunciare, come prova ad esempio la succ/ne di cui all'Ossev/ne H3.2. Infatti qui la più piccola dominante, ossia la funzione $\varphi = \sup_{k\in N} f_k$, ha espressione $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \chi_{[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[}(x)$, e si riconosce che essa non è sommabile, dato che, tenendo conto del Teorema H3.4, si calcola $\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} k \int_0^1 \chi_{[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty$.

Esempio H3.5. Calcoliamo $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos kx}{1+kx^2}\,\mathrm{d}x$.
Poniamo, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $f_k(x) = \frac{\cos kx}{1+kx^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

---

(1) Si osservi che, in base alla (a), la funzione $f+g$ è definita *q.o.* in E.

(2) E' sufficiente che le f_k siano misurabili; infatti la sommabilità sarebbe conseguenza delle ulteriori ipotesi (invero, da $|f_k| \leq \varphi$ *q.o.* in E segue che $\int_E |f_k(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x$).

Si vede che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una succ/ne in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, avente limite $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Inoltre risulta, $\forall\, k\in\mathbb{N}$ e $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $|f_k(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$, e la funzione $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è sommabile in $\mathbb{R}$. Per il teorema di Lebesgue si ha che $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Esempio H3.6. Calcoliamo $\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{k}} \mathrm{sen}^4 kx\,\mathrm{d}x$. Si noti che nell'integrale la dipendenza da k non riguarda soltanto la funzione integranda ma anche l'intervallo di integrazione. Poniamo, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $f_k(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}^4 kx & \text{se } 0 \leq 1 \leq \frac{\pi}{k} \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{k} < x \leq \pi \end{cases}$, $x \in [0,\pi]$, e riconosciamo che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una succ/ne in $\mathcal{M}([0,\pi])$, avente come limite la funzione $f(x) = 0$. Inoltre risulta, $\forall\, k\in\mathbb{N}$ e $\forall\, x\in[0,\pi]$, $|f_k(x)| \leq 1$, e la funzione $\varphi(x) = 1$ è sommabile in $[0,\pi]$. In virtù del teorema di Lebesgue si ha che $\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{k}} \mathrm{sen}^4 kx\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{k}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int_0^{\pi} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
Si osservi che la convergenza di $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ad f in $[0,\pi]$ non è uniforme.

Per ciò che riguarda l'integrazione termine a termine, si è visto con il Teorema H3.4 che questa è sempre possibile nel caso di funzioni non negative. Se invece le funzioni sono di segno qualsiasi, vale il seguente altro

Teorema H3.9. *Siano l'insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e la succ/ne $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di funzioni sommabili in E* [(1)]. *Se la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)|\,\mathrm{d}x$ converge, allora per q.o. $x\in E$ la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge assol/te; inoltre, considerata $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ per q.o. $x\in E$, si ha che f è sommabile in E e risulta $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x$.*

Dim. Sia $\varphi : E \to \overline{\mathbb{R}}$ definita da $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$. Ovviamente φ è misurabile, e per il Teorema H3.4 si ha che $\int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)|\,\mathrm{d}x$. Pertanto, tenendo conto dell'ipotesi, la funzione φ è sommabile. Ne segue, per la proprietà (a) delle funzioni sommabili, che per *q.o.* $x\in E$ $\varphi(x)\in\mathbb{R}$, e ciò equivale a dire che per *q.o.* $x\in E$ la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge assol/te. Infine la seconda parte della tesi si dimostra applicando il teorema di Lebesgue alla succ/ne delle somme parziali $(\sum\limits_{i=1}^{k} f_i)_{k\in\mathbb{N}}$, dopo aver osservato che, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $|\sum\limits_{i=1}^{k} f_i| \leq \varphi$ ■

Esempio H3.7. Calcoliamo $\int_0^1 \frac{1}{1+x} \log\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.
Si osserva che, $\forall\, x\in\,]0,1[$, $\frac{1}{1+x} \log\frac{1}{x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \log\frac{1}{x}$.
Posto, $\forall\, k\in\mathbb{N}_0$, $f_k(x) = (-1)^k x^k \log\frac{1}{x}$, $x\in\,]0,1[$, si calcola che $\int_0^1 |f_k(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^k \log\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{(k+1)^2}$; ed è noto che la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ converge. Ne segue, per il Teorema H3.9, che $\int_0^1 \frac{1}{1+x} \log\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 x^k \log\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

[(1)] E' sufficiente che le f_k siano misurabili; infatti la sommabilità sarebbe conseguenza delle ulteriori ipotesi (invero, se la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)|\,\mathrm{d}x$ converge, ogni suo termine è finito).

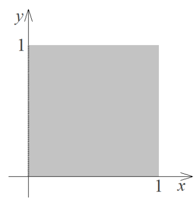
H4. Misura negli spazi prodotto e calcolo degli integrali multipli

Allo scopo di enunciare il teorema sulla misura dei sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ e quello sulla riduzione degli integrali multipli, introduciamo la seguente notazione: dato $E \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, per ogni $x \in \mathbb{R}^p$ chiamiamo *sezione di E di piede x* l'insieme $E_x := \{y \in \mathbb{R}^q / (x,y) \in E\}$.

Il primo dei due teoremi annunciati stabilisce che la misura di E è uguale alla somma (intesa come l'integrale rispetto ad $x \in \mathbb{R}^p$) delle misure in $\mathbb{R}^q$ di tutte le sezioni E_x. Naturalmente il ruolo delle variabili può essere scambiato, anzi il teorema vale anche nel caso in cui le p componenti che formano la variabile x o le q che formano la y non sono necessariamente consecutive.

Teorema H4.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Se $E \in \mathcal{M}_{p+q}$, allora per q.o. $x \in \mathbb{R}^p$ si ha che $E_x \in \mathcal{M}_q$; inoltre, considerata $\varphi : \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che per q.o. $x \in \mathbb{R}^p$ $\varphi(x) = m_q(E_x)$, si ha che φ è misurabile in $\mathbb{R}^p$ e che $m_{p+q}(E) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.*

Si osserva che, nel teorema precedente, l'espressione "per *q.o.* $x \in \mathbb{R}^p$ " non può essere sostituita dall'espressione "$\forall x \in \mathbb{R}^p$ ". A riprova di ciò, proponiamo un paio di esempi riguardanti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$: considerato $J \subseteq [0,1]$ non misurabile in $\mathbb{R}$ e posto $E = \{0\} \times J$, si vede che E è misurabile mentre, preso $\overline{x} = 0$, $E_{\overline{x}}\,(=J)$ non lo è; ed ancora, posto $F = E \cup (\,]0,1] \times [0,1])$ = $\{(x,y) \in [0,1]^2 / x = 0 \;\Rightarrow\; y \in J\}$, si ha che F è misurabile, perché unione di due insiemi misurabili, mentre $F_{\overline{x}}\,(=J)$ non lo è.



Il teorema che segue, oltre a caratterizzare la misurabilità di una funzione mediante la misurabilità del relativo sottografico, fornisce anche l'interpretazione geometrica dell'integrale. Premettiamo che, data $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, si dice *sottografico* di f l'insieme $SG(f) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / x \in E,\ t < f(x)\}$; inoltre, se f è non negativa, si dice *rettangoloide* associato ad f l'insieme $R(f) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / x \in E,\ 0 < t < f(x)\}$.

Teorema H4.2. *Dati $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile ed $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, si ha che f è misurabile se e solo se $SG(f)$ è misurabile. Inoltre, se f è non negativa, si ha che f è misurabile se e solo se $R(f)$ è misurabile, e risulta $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = m_{n+1}(R(f))$.*

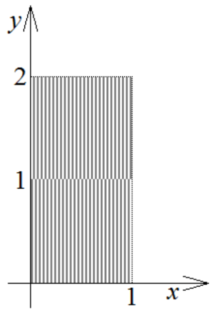
Si può provare che nel teorema precedente gli insiemi $SG(f)$ e $R(f)$ possono essere sostituiti rispettivamente dagli insiemi $SG'(f) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / x \in E,\ t \leq f(x)\}$ e $R'(f) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / x \in E,\ 0 < t \leq f(x)\}$.

Il prossimo teorema riguarda il problema del calcolo degli integrali multipli: esso esprime un integrale di $p+q$ variabili mediante una sequenza di due integrali, uno di q variabili e l'altro di p variabili. Anche qui avvertiamo che il ruolo delle variabili x ed y può essere scambiato, e che anzi il teorema vale anche nel caso in cui le p componenti che formano la variabile x o le q che formano la y non sono necessariamente consecutive.

Teorema H4.3 (di Fubini). *Sia* $f: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \overline{\mathbb{R}}$. *Se* f *è sommabile (o integrabile) in* $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, *allora per q.o.* $x \in \mathbb{R}^p$ *la funzione* $f_{(x)}: \mathbb{R}^q \to \overline{\mathbb{R}}$ *definita da* $f_{(x)}(y) = f(x,y)$ *è sommabile (rispettivamente integrabile) in* $\mathbb{R}^q$*; inoltre, considerata* $\varphi: \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ *tale che per q.o.* $x \in \mathbb{R}^p$ $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, \mathrm{d}y$, *si ha che* φ *è sommabile (rispettivamente integrabile) in* $\mathbb{R}^p$ *e che* $\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\, \mathrm{d}x$.

L'uguaglianza finale è la cosiddetta "formula di riduzione", e viene scritta in genere nella forma seguente: $\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^p} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, \mathrm{d}y$. Applicando reiteratamente questa formula, il problema diventa quello di calcolare $p+q$ integrali di una sola variabile.

Osservazione H4.1. Mostriamo con un esempio che *nei Teoremi H4.1 e H4.3 non vale l'implicazione inversa.*
Sia $E = (J_1 \times [0,1]) \cup (J_2 \times]1,2])$, con $J_1 \subseteq [0,1]$ non misurabile e $J_2 = [0,1] \setminus J_1$.
Si ha, $\forall x \in \mathbb{R}$, $E_x = [0,1]$ se $x \in J_1$, $E_x =]1,2]$ se $x \in J_2$, e $E_x = \emptyset$ se $x \notin [0,1]$; cosicché in ogni caso E_x è misurabile, e la funzione $x \in \mathbb{R} \to m_1(E_x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{se } x \notin [0,1] \end{cases}$ è sommabile; ma intanto E non è misurabile (altrimenti sarebbe violato proprio il Teorema H4.1, dato che sono non misurabili le sezioni E_y ottenute con $y \in [0,2]$).



Inoltre, $\forall x \in \mathbb{R}$, la funzione $\chi_E(x,\cdot)$ è $\chi_{[0,1]}$ se $x \in J_1$, $\chi_{]1,2]}$ se $x \in J_2$, e $\chi_\emptyset$ se $x \notin [0,1]$; quindi in ogni caso $\chi_E(x,\cdot)$ è sommabile; sommabile è anche la funzione $x \in \mathbb{R} \to \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x,y)\, \mathrm{d}y = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{se } x \notin [0,1] \end{cases}$; ma intanto la funzione χ_E non è integrabile.

•) Esaminiamo ora in particolare i casi delle funzioni di due e di tre variabili, definite su insiemi cosiddetti "normali". Naturalmente, anche in questo caso, in tutto ciò che diremo il ruolo delle variabili potrà essere scambiato.

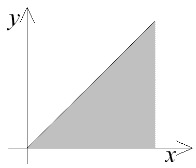
-) Dato $E \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice che E è *normale rispetto all'asse* x se può rappresentarsi nella forma $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x \in I,\, \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$, dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$, mentre α e β sono funzioni misurabili in I, con valori quasi ovunque finiti e tali che $\alpha \le \beta$.
E' evidente che l'insieme E è misurabile, essendo $E = SG'(\beta) \setminus SG(\alpha)$.

Si riconosce poi che, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, la sezione E_x e la relativa misura sono date rispett/te da $E_x = \begin{cases} [\alpha(x),\beta(x)] & \text{se } x\in I \\ \emptyset & \text{se } x\notin I \end{cases}$ e $m_1(E_x) = \begin{cases} \beta(x)-\alpha(x) & \text{per } q.o.\, x\in I \\ 0 & \text{se } x\notin I \end{cases}$, cosicché, in virtù del Teorema H4.1, risulta $m_2(E) = \int_{\mathbb{R}} m_1(E_x)\,\mathrm{d}x = \int_I (\beta(x)-\alpha(x))\,\mathrm{d}x$.
Infine, data $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabile, si ha che $\iint_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_I \mathrm{d}x \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$
Infatti, considerata $f^* : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ definita da $f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y)\in E \\ 0 & \text{se } (x,y)\notin E \end{cases}$, si vede che f^* è integrabile in $\mathbb{R}^2$ e, per il teorema di Fubini, si ha: $\iint_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} f^*(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} f^*(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_I \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} f^*(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_I \mathrm{d}x \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

-) Diciamo che l'insieme $E\subseteq\mathbb{R}^3$ è *normale rispetto al piano xy* se esso è del tipo $E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ (x,y)\in B\,,\ \alpha(x,y)\le z\le\beta(x,y)\,\}$, con B sottoinseme misurabile di $\mathbb{R}^2$ e α e β funzioni misurabili su B, con valori quasi ovunque finiti e tali che $\alpha\le\beta$.
Si riconosce anche qui che E è misurabile, che $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$ la sezione di piede (x,y) è $E_{(x,y)} = \begin{cases} [\alpha(x,y),\beta(x,y)] & \text{se } (x,y)\in B \\ \emptyset & \text{se } (x,y)\notin B \end{cases}$, che $m_3(E) = \iint_B (\beta(x,y)-\alpha(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ed infine che, se $f : E\to\overline{\mathbb{R}}$ è una funzione integrabile, allora
$\iiint_E f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$.

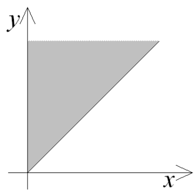
-) Diciamo che l'insieme $E\subseteq\mathbb{R}^3$ è *normale rispetto all'asse z* se esso è del tipo $E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ z\in I\,,\ (x,y)\in B_z\}$, dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\forall\, z\in I\ \ B_z\in\mathcal{M}_2$.
Se $E\in\mathcal{M}_3$, si ha che $\forall\, z\in\mathbb{R}\ \ E_z = \begin{cases} B_z & \text{se } z\in I \\ \emptyset & \text{se } z\notin I \end{cases}$, che $m_3(E) = \int_I m_2(B_z)\,\mathrm{d}z$, e che, data $f : E\to\overline{\mathbb{R}}$ integrabile, allora $\iiint_E f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_I \mathrm{d}z \iint_{B_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Esempio H4.1. Dato $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,0<y<x\}$, calcoliamo $\iint_E \frac{e^{y-x}}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.



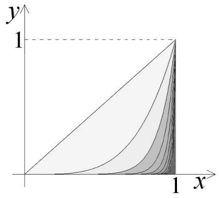
Osservato che $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,0<y<+\infty,\ y<x<+\infty\}$, si ha:
$\iint_E \frac{e^{y-x}}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{e^y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \int_y^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^y}{1+y^2}\,[-\mathrm{e}^{-x}]_y^{+\infty}\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = [\operatorname{arctg} y]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Esempio H4.2. Calcoliamo $\lim\limits_{k\to\infty} \iint_E (1+\frac{x}{k})^k\,\mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dove $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 0<x<y\}\,.$



Poniamo, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $f_k(x,y) = (1+\frac{x}{k})^k\,\mathrm{e}^{-2y}\,,\ (x,y)\in E$. Riconosciamo che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una succ/ne crescente in $\mathcal{M}^+(E)$ il cui limite è la funzione $f(x,y) = \mathrm{e}^{x-2y}$. Tenendo conto del teorema di B. Levi e di quello di Fubini si calcola: $\lim\limits_{k\to\infty} \iint_E f_k(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

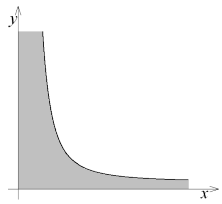
Esempio H4.3. Posto, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $E_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < x^{k+1} < y < x\}$, calcoliamo $\lim\limits_{k\to\infty} k^2 \iint_{E_k} \frac{e^{xy}}{(kx+1)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Si noti che nell'integrale la dipendenza da k riguarda sia la funzione integranda sia l'insieme di integrazione.



Poniamo $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < y < x < 1\}$, e vediamo che $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di insiemi misurabili tali che $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = E$. Definiamo, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $f_k(x,y) = \frac{k^2 e^{xy}}{(kx+1)^2}\, \chi_{E_k}(x,y)$, $(x,y)\in E$, e riconosciamo che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente in $\mathcal{M}^+(E)$, il cui limite è la funzione f definita da $f(x,y) = \frac{e^{xy}}{x^2}$, $(x,y)\in E$.

Tenendo conto del teorema di B. Levi, della Propos/ne H3.5 e del teorema di Fubini, si calcola: $\lim\limits_{k\to\infty} k^2 \iint_{E_k} \frac{e^{xy}}{(kx+1)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim\limits_{k\to\infty} \iint_{E_k} f_k(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim\limits_{k\to\infty} \iint_E f_k(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_E f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x \int_0^x e^{xy}\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{e^{x^2}-1}{x^3}\, \mathrm{d}x = +\infty$.

Esempio H4.4. Dato l'insieme $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ 0 < y < \frac{1}{x^3}\}$, calcoliamo $\lim\limits_{k\to\infty} \iint_E \mathrm{e}^{-kxy} \operatorname{sen} \frac{x}{k}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.



Poniamo, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $f_k(x,y) = \mathrm{e}^{-kxy} \operatorname{sen} \frac{x}{k}$, $(x,y)\in E$, e osserviamo che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una succ/ne in $\mathcal{M}(E)$ avente come limite la funzione f definita in E da $f(x,y) = 0$. Inoltre risulta, $\forall\, k\in\mathbb{N}$ e $\forall\,(x,y)\in E$, $|f_k(x,y)| \le \frac{x}{k}\, \mathrm{e}^{-kxy} \le x\, \mathrm{e}^{-xy}$, e la funzione $\varphi(x,y) = x\, \mathrm{e}^{-xy}$ è sommabile in E, dato che, tenendo conto del teorema di Fubini, risulta: $\iint_E \varphi(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} x\, \mathrm{d}x \int_0^{1/x^3} \mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} (1 - \mathrm{e}^{-1/x^2})\, \mathrm{d}x \in \mathbb{R}$.

In virtù del teorema di Lebesgue si ha che $\lim\limits_{k\to\infty} \iint_E f_k(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_E f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

•) Allo scopo di enunciare il teorema sul cambiamento di variabili negli integrali, ricordiamo che, dati gli aperti U ed X di $\mathbb{R}^n$, una trasformazione $\varphi : U \to X$ si dice essere un *diffeomorfismo* se è bigettiva ed è di classe C^1 con inversa anch'essa di classe C^1.

Teorema H4.4. *Siano U ed X due aperti di $\mathbb{R}^n$ e sia $\varphi : U \to X$ un diffeomorfismo. Se E è un sottoinsieme misurabile di X, allora, posto $F = \varphi^{-1}(E)$, anche F è misurabile e $m(E) = \int_F |\mathrm{J}\varphi(u)|\, \mathrm{d}u$. Se poi f è una funzione integrabile in E, allora le funzioni $f\circ\varphi$ e $(f\circ\varphi)\,|\mathrm{J}\varphi|$ sono integrabili in F e risulta $\int_E f(x)\, \mathrm{d}x = \int_F f(\varphi(u))|\, \mathrm{J}\varphi(u)|\, \mathrm{d}u$.*

-) Nel caso $n = 2$ molto spesso torna utile sostituire le coordinate cartesiane $x\,y$ con le coordinate polari $\rho\,\vartheta$, ossia ricorrere alla trasformazione $\varphi : S \to \mathbb{R}^2$, con $S := \{(\rho,\vartheta)\in \mathbb{R}^2/\, \rho \ge 0\,,\, 0 \le \vartheta < 2\pi\,\}$, definita da $\varphi \equiv \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$.

Si riconosce che φ è suriettiva ma non iniettiva. Posto $S_\mathrm{o} = \{(\rho,\vartheta)\in S \,/\, \rho = 0 \vee \vartheta = 0\,\}$ e $X_\mathrm{o} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\, y = 0,\, x \ge 0\,\}$, è facile verificare che φ è un diffeomorfismo fra gli aperti $U = S\backslash S_\mathrm{o}$ e $X = \mathbb{R}^2\backslash X_\mathrm{o}$, con $\mathrm{J}\varphi(\rho,\vartheta) = \rho$.

In virtù del teorema sul cambiamento di variabili, *dato* $E \subseteq \mathbb{R}^2$ *misurabile e data* f *integrabile in* E*, si ha che* $\overset{-1}{\varphi}(E)$ *è misurabile, che le funzioni* $f\circ\varphi$ *e* $(f\circ\varphi)\,|\,\mathrm{J}\varphi|$ *sono integrabili in* $\overset{-1}{\varphi}(E)$ *e che* $\iint_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(\rho,\vartheta))\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\vartheta$.

Infatti, considerato che S_o ed X_o hanno misura nulla, posto $E_\mathrm{o} = E\cap X_\mathrm{o}$, si ha che $\overset{-1}{\varphi}(E) = \overset{-1}{\varphi}(E\backslash E_\mathrm{o})\cup\overset{-1}{\varphi}(E_\mathrm{o})$, dove $\overset{-1}{\varphi}(E\backslash E_\mathrm{o})$ è misurabile per il Teorema H4.4 applicato al diffeomorfismo $\overset{-1}{\varphi}$, e $\overset{-1}{\varphi}(E_\mathrm{o})$ è misurabile con misura nulla perché incluso in X_o; inoltre, per il Teorema H4.4 applicato al diffeomorfismo φ, le funzioni $f\circ\varphi$ e $(f\circ\varphi)\,|\,\mathrm{J}\varphi|$ sono integrabili in $\overset{-1}{\varphi}(E\setminus E_\mathrm{o})$, quindi anche in $\overset{-1}{\varphi}(E)$, e risulta $\iint_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{E\backslash E_\mathrm{o}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\varphi^{-1}(E\backslash E_\mathrm{o})} f(\varphi(\rho,\vartheta))\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\vartheta = \iint_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(\rho,\vartheta))\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\vartheta$.

-) Più in generale si definiscono le *coordinate sferiche* in $\mathbb{R}^n$, costituite dalla variabile radiale $\rho = |x| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\in[0,+\infty[$ e dalle variabili angolari $\vartheta\in[0,2\pi[$ e $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n-2}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. La trasformazione è

$$\varphi \equiv \begin{cases} x_1 = \rho\cos\vartheta\cos\phi_1\cos\phi_2\cos\phi_3\ldots\cos\phi_{n-3}\cos\phi_{n-2} \\ x_2 = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\phi_1\cos\phi_2\cos\phi_3\ldots\cos\phi_{n-3}\cos\phi_{n-2} \\ x_3 = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi_1\cos\phi_2\cos\phi_3\ldots\cos\phi_{n-3}\cos\phi_{n-2} \\ x_4 = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi_2\cos\phi_3\ldots\cos\phi_{n-3}\cos\phi_{n-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi_{n-3}\cos\phi_{n-2} \\ x_n = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi_{n-2} \end{cases} .$$

per la quale si calcola che $\mathrm{J}\varphi(\rho,\vartheta,\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n-2}) = \rho^{n-1}\cos\phi_1\cos^2\phi_2\ldots\cos^{n-2}\phi_{n-2}$.

Esempio H4.4 (misura della palla n-dimensionale). Per ogni $n\in\mathbb{N}$ consideriamo la palla unitaria $\Omega^{(n)} = \{\,\xi\in\mathbb{R}^n/\,|\xi|<1\,\}$, e proviamo a calcolarne la misura ω_n. Da questa si potrà poi ricavare la misura della palla di raggio r, $\Omega_r^{(n)} = \{\,\xi\in\mathbb{R}^n/\,|\xi|<r\,\}$; infatti si riconosce che $\Omega_r^{(n)} = r\,\Omega^{(n)}$, e quindi risulta $m_n(\Omega_r^{(n)}) = r^n\omega_n$.

Posto $\xi = (x,y)$, con $x = (x_1,x_2)$ e $y = (x_3,x_4,\ldots,x_n)$, si vede che $|\xi|<1 \;\Leftrightarrow\; |x|<1 \,\wedge\, |y|<(1-|x|^2)^{1/2}$, cosicché la sezione di $\Omega^{(n)}$ con piede x è $(\Omega^{(n)})_x = \begin{cases} \Omega^{(n-2)}_{(1-|x|^2)^{1/2}} & \text{se } x\in\Omega^{(2)} \\ \emptyset & \text{se } x\notin\Omega^{(2)} \end{cases}$.

Quindi si calcola: $\omega_n = \iint_{\mathbb{R}^2} m_{n-2}((\Omega^{(n)})_x)\,\mathrm{d}x = \iint_{\Omega^{(2)}}(1-|x|^2)^{\frac{n-2}{2}} m_{n-2}(\Omega^{(n-2)})\,\mathrm{d}x = \omega_{n-2}\iint_{\Omega^{(2)}}(1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 2\pi\omega_{n-2}\int_0^1(1-\rho^2)^{\frac{n-2}{2}}\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{2\pi}{n}\omega_{n-2}$.

Ricordando che $\omega_1 = 2$ e $\omega_2 = \pi$, si conclude che, $\forall\,k\in\mathbb{N}$,
$\omega_{2k} = \frac{\pi}{k}\omega_{2k-2} = \ldots = \frac{\pi^{k-1}}{k!}\omega_2 = \frac{\pi^k}{k!}$, $\omega_{2k+1} = \frac{2\pi}{2k+1}\omega_{2k-1} = \ldots = \frac{2^k\pi^k}{(2k+1)!!}\omega_1 = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!}$.

H5. Spazi L^p

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile con misura non nulla.

-) Per ogni $p \in [1,+\infty[$ si pone $L^p(E) = \{f\colon E \to \overline{\mathbb{R}} \,/\, f \in \mathcal{M}(E) \text{ e } \int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x < +\infty\}$.
Ricordiamo che da $f \in \mathcal{M}(E)$ segue che $|f| \in \mathcal{M}(E)$, e osserviamo che $|f|^p \in \mathcal{M}^+(E)$, essendo $L_t(|f|^p) = \begin{cases} L_{t^{1/p}}(|f|) & \text{se } t \geq 0 \\ E & \text{se } t < 0 \end{cases}$; quindi esiste l'$\int_E |f|^p \mathrm{d}x$.

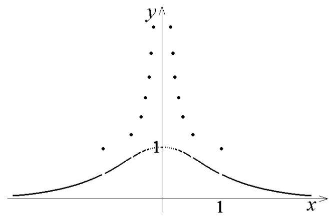
Esempio H5.1. Posto $f(x) = \frac{1}{x^{3/4}}$, si riconosce che $f \in L^1(\,]0,1[\,)$ ma $f \notin L^2(\,]0,1[\,)$, mentre al contrario $f \in L^2(\,]1,+\infty[\,)$ ma $f \notin L^1(\,]1,+\infty[\,)$.

L'insieme $L^1(E)$ non è che l'insieme delle funzioni sommabili in E, già indicato con $\mathcal{L}(E)$; ed è noto che si tratta di uno spazio vettoriale, con le usuali operazioni di prodotto di una funzione per uno scalare e di somma di due funzioni.
Per provare che $L^p(E)$ *è uno spazio vettoriale, per ogni* $p \in [1,+\infty[$, riconosciamo intanto che da $f \in L^p(E)$ e $c \in \mathbb{R}$ segue subito che $cf \in L^p(E)$. Se poi $f, g \in L^p(E)$, allora: $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ per *q.o.* $x \in E$, è definita $f+g \in \mathcal{M}(E)$ [(1)], ed infine $\int_E |f+g|^p \mathrm{d}x < +\infty$.
Quest'ultima relazione discende dalla disug/za $(|f(x)|+|g(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p+|g(x)|^p)$, che può essere schematizzata nella forma seguente:
$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$, con $a, b \in [0,+\infty[$.
Essa, a parte il caso banale $a = 0$, è equivalente alla disug/za $(1+t)^p \leq 2^{p-1}(1+t^p)$, con $t = \frac{b}{a}$, che si verifica facilmente osservando che la funzione $\gamma(t) = 2^{p-1}(1+t^p) - (1+t)^p$, $t \in [0,+\infty[$, la cui derivata è $\gamma'(t) = p((2t)^{p-1} - (1+t)^{p-1})$, ha minimo assoluto $\gamma(1) = 0$.

-) Resta ora da definire lo spazio $L^\infty(E)$, e ciò richiede che sia introdotta la nozione di funzione essenzialmente limitata.
Data $\varphi \in \mathcal{M}^+(E)$, un numero $\lambda \in [0,+\infty[$ è detto *maggiorante essenziale* di φ se per *q.o.* $x \in E$ $\varphi(x) \leq \lambda$, ossia se l'insieme $L_\lambda(\varphi)$ ha misura nulla. E' evidente che, se λ è maggiorante essenziale di φ, lo è anche ogni numero maggiore di λ.
Se φ ha maggioranti essenziali, si dice che φ è *essenzialmente limitata (superiormente)*, e il numero $\mu = \inf\{\lambda \in [0,+\infty[\,/\, m(L_\lambda(\varphi)) = 0\}$ è detto *estremo superiore essenziale* di φ ed è indicato con $\operatorname{ess\,sup}_E \varphi$.
A ben vedere si ha che $\mu = \min\{\lambda \in [0,+\infty[\,/\, m(L_\lambda(\varphi)) = 0\}$. Infatti, presa $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successione di maggioranti essenziali di φ convergente a μ, si ha che $L_\mu(\varphi) = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_{\lambda_k}(\varphi)$, e da qui segue, essendo $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $m(L_{\lambda_k}(\varphi)) = 0$, che anche $m(L_\mu(\varphi)) = 0$.
Se φ non è essenzialmente limitata, se cioè $\forall\, \lambda \in [0,+\infty[$ l'insieme $L_\lambda(\varphi)$ ha misura positiva, si pone $\operatorname{ess\,sup}_E \varphi = +\infty$.

---

(1) Già qui bisognerebbe aver introdotto in $\mathcal{M}(E)$ la relazione di equivalenza, di cui si parlerà più avanti, che consente di interpretare come $f+g$ una qualunque funzione definita in E ed avente valore $f(x)+g(x)$ in ogni punto $x \in E$ nel quale questa somma esiste.



Esempio H5.2. La funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definita da $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x \neq \pm\frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{|x|} & \text{altrimenti} \end{cases}$ è misurabile, dato che è *q.o.* continua. Essa non è limitata, ma è essenz/te limitata, con $\operatorname*{ess\,sup}_E \varphi = 1$.

Definiamo $L^\infty(E) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}} \,/\, f \in \mathcal{M}(E) \text{ e } \operatorname*{ess\,sup}_E |f| < +\infty\}$.
Facilmente si riconosce che anche $L^\infty(E)$ *è uno spazio vettoriale*; infatti, dati $c \in \mathbb{R}$, con $c \neq 0$, $f, g \in \mathcal{M}(E)$, $\lambda, \mu \in [0, +\infty[$ maggioranti essenziali rispett/te di $|f|$ e $|g|$, si vede subito che $|c|\lambda$ è maggiorante essenziale di $|cf|$ e $\lambda + \mu$ è maggiorante essenziale di $|f + g|$ (dopo aver osservato anche qui che è definita $f + g \in \mathcal{M}(E)$).

-) Data $f \in L^p(E)$, definiamo la norma $\|f\|_{L^p} = (\int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}x)^{1/p}$ se $p \in [1, +\infty[$, ed ancora $\|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_E |f|$. Per brevità d'ora in poi scriveremo $\|f\|_p$ in luogo di $\|f\|_{L^p}$.
E' facile vedere che, dati $r, s \in [1, +\infty[$, da una funzione di $L^s(E)$ se ne può ricavare una di $L^r(E)$; invero, da $f \in L^s(E)$ segue $|f|^{s/r} \in L^r(E)$; e si ha inoltre che $\||f|^{s/r}\|_r = \|f\|_s^{s/r}$.

Osservazione H5.1. E' evidente che, se $f \in C^0([a, b])$, le norme $||\cdot||_p$ con $p \in [1, +\infty[$ qui definite coincidono con le norme omonime definite a suo tempo per lo spazio $C^0([a, b])$. Ciò vale anche per $p = +\infty$, e per provarlo basta verificare che, se f è continua e λ è maggiorante essenziale per $|f|$, allora λ è maggiorante per $|f|$. Se infatti esistesse $\overline{x} \in [a, b]$ t.c. $|f(\overline{x})| > \lambda$, allora esisterebbe $I \in \mathcal{I}(\overline{x})$ t.c. $\forall\, x \in I \cap [a, b]$ $|f(x)| > \lambda$; ma allora si avrebbe $I \cap [a, b] \subseteq L_\lambda(|f|)$, da cui seguirebbe che $m(L_\lambda(|f|)) \neq 0$.

-) Tornando allo spazio $L^p(E)$ con $p \in [1, +\infty]$, a ben vedere le espressioni riportate sopra non definiscono ancora una norma, dato che l'uguaglianza $\|f\|_p = 0$ si ha non solo per la funzione nulla ma anche per ogni funzione nulla *q.o.* in E, risultando così violata la proprietà (n_1). Per risolvere questo problema introduciamo nell'insieme $\mathcal{M}(E)$ la seguente relazione di equivalenza: $f \simeq g \iff f(x) = g(x)$ per *q.o.* $x \in E$. Allo scopo di evitare inutili complicazioni formali, immaginiamo di identificare una funzione misurabile in E con la classe di equivalenza da essa individuata, ciò che equivale a identificare lo spazio $\mathcal{M}(E)$ con il suo insieme quoziente rispetto alla relazione introdotta; ne consegue che due funzioni di $\mathcal{M}(E)$ vanno considerate uguali se coincidono *q.o.* in E.
La verifica della proprietà (n_2) ($\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$) e banale per ogni $p \in [1, +\infty]$.
Invece la verifica della (n_3) ($\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$) è piuttosto complicata, salvo che per i valori estremi di p. Se $p = 1$, la proprietà è: $\int_E |f + g| \,\mathrm{d}x \leq \int_E |f| \,\mathrm{d}x + \int_E |g| \,\mathrm{d}x$.
Per il caso $p = +\infty$, posto $\lambda = \operatorname*{ess\,sup}_E |f|$ e $\mu = \operatorname*{ess\,sup}_E |g|$, si vede che $\lambda + \mu$ è maggiorante essenziale di $|f + g|$, e pertanto $\operatorname*{ess\,sup}_E |f + g| \leq \lambda + \mu$.
Se $1 < p < +\infty$, la dim/ne della proprietà (n_3), detta anche *disug/za di Minkowski*, può essere effettuata utilizzando la disug/za di Hölder, di cui ci occuperemo tra poco.

Ricordiamo che p e q presi in $]1,+\infty[$ si dicono *esponenti coniugati* se $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, ossia $q=\frac{p}{p-1}$; inoltre si conviene che il coniugato di 1 è $+\infty$.
Dati $p,q\in]1,+\infty[$ coniugati, vale la *disug/za di Young*: $\forall\, a,b\in[0,+\infty[,\ a\,b\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.
Questa si dimostra osservando che la funzione $\gamma(t)=\frac{t^p}{p}+\frac{b^q}{q}-t\,b$, $t\in\mathbb{R}^+$, la cui derivata è $\gamma'(t)=t^{p-1}-b$, ha minimo assoluto $\gamma(b^{\frac{1}{p-1}})=\ldots=(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1)\,b^q=0$, cosicché risulta $\gamma(t)\geq 0$ per ogni $t\in\mathbb{R}^+$, ed in particolare per $t=a$.

Proposizione H5.1 (disuguaglianza di Hölder). *Dati $p,q\in]1,+\infty[$ coniugati e date $u\in L^p(E)$ e $v\in L^q(E)$, si ha che $\int_E|u(x)\,v(x)|\,\mathrm{d}x\leq\|u\|_p\,\|v\|_q$.*

Dim. Il caso $\|u\|_p=0$ (o $\|v\|_q=0$) è banale: se $\|u\|_p=0$, allora u è nulla *q.o.* in E, e quindi $\int_E|u\,v|\,\mathrm{d}x=0$. Dunque supponiamo $p,q\in]1,+\infty[$, $\|u\|_p\neq 0$ e $\|v\|_q\neq 0$. In virtù della disug/za di Young si ha, per ogni x per cui $u(x),v(x)\in\mathbb{R}$, ossia per *q.o.* $x\in E$, che $\frac{|u(x)v(x)|}{\|u\|_p\|v\|_q}\leq\frac{1}{p}\frac{|u(x)|^p}{\|u\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|v(x)|^q}{\|v\|_q^q}$. Ne segue che $\frac{1}{\|u\|_p\|v\|_q}\int_E|u\,v|\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{p\|u\|_p^p}\int_E|u|^p\mathrm{d}x+\frac{1}{q\|v\|_q^q}\int_E|v|^q\mathrm{d}x=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. La tesi si ottiene moltiplicando primo e ultimo membro per $\|u\|_p\|v\|_q$ ■

Osserviamo che la disuguaglianza di Hölder vale anche nel caso $p=1$ e $q=+\infty$ (o viceversa): se $u\in L^1(E)$ e $v\in L^\infty(E)$, allora per *q.o.* $x\in E$ si ha che $u(x)\in\mathbb{R}$ e $|v(x)|\leq\mu:=\operatorname{ess\,sup}_E|v|\in\mathbb{R}$; e la tesi è che $\int_E|u\,v|\,\mathrm{d}x\leq\mu\int_E|u|\,\mathrm{d}x$.

A questo punto possiamo dimostrare la disug/za di Minkowski, in modo che il problema della verifica della (n_3) sia risolto anche nel caso $p\in]1,+\infty[$.

Proposizione H5.2 (disuguaglianza di Minkowski). *Date $f,g\in L^p(E)$ con $p\in]1,+\infty[$ si ha che $\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p$.*

Dim. Applicando la disug/za di Hölder alle funzioni $f,g\in L^p(E)$ e $|f+g|^{p-1}\in L^q(E)$, dove $q=\frac{p}{p-1}$, si ricava che $\int_E|f+g|^p\mathrm{d}x\leq\int_E(|f|+|g|)|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}x=\int_E|f|\,|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}x+\int_E|g|\,|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}x\leq\|f\|_p\,\||f+g|^{p-1}\|_q+\|g\|_p\,\||f+g|^{p-1}\|_q=(\|f\|_p+\|g\|_p)(\int_E|f+g|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}$; e la tesi si ottiene moltiplicando primo e ultimo membro per $(\int_E|f+g|^p\mathrm{d}x)^{-\frac{1}{q}}$ ■

-) Supponiamo ora che E abbia misura finita. Nella propos/ne seguente si stabilisce che lo spazio $L^p(E)$ decresce al crescere di p.

Proposizione H5.3. *Se $m(E)<+\infty$, allora, dati $1\leq r<s\leq+\infty$ si ha che $L^s(E)\subseteq L^r(E)$, ed inoltre, $\forall\, f\in L^s(E)$, risulta $\|f\|_r\leq\|f\|_s(m(E))^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}$.*

Dim. Consideriamo prima il caso $s=+\infty$. Presa $f\in L^\infty(E)$ e posto $\mu=\operatorname{ess\,sup}_E|f|$, si ha che $\int_E|f|^r\mathrm{d}x\leq\mu^r\int_E\mathrm{d}x=\mu^r m(E)<+\infty$, per cui $f\in L^r(E)$; inoltre dalla disug/za provata, elevando alla $\frac{1}{r}$, si ricava che $\|f\|_r\leq\|f\|_\infty(m(E))^{\frac{1}{r}}$.

Sia ora $s < +\infty$. Presa $f \in L^s(E)$ e considerati gli esponenti coniugati $p = \frac{s}{r}$ e $q = \frac{s}{s-r}$, dalla disug/za di Hölder applicata con $u(x) = |f(x)|^r$ e $v(x) = 1$ si ricava che $\int_E |f|^r \mathrm{d}x \le (\int_E |f|^s \mathrm{d}x)^{\frac{r}{s}} (\int_E \mathrm{d}x)^{\frac{s-r}{s}} = \|f\|_s^r \, (m(E))^{1-\frac{r}{s}}$; e da qui segue la tesi ▪

Nella propos/ne precedente si è stabilito in particolare che, se $f \in L^\infty(E)$, allora per ogni $p \in [1, +\infty[$ si ha che $f \in L^p(E)$ e che $\|f\|_p \le \|f\|_\infty (m(E))^{\frac{1}{p}}$.
Sfruttando anche quest'ultimo risultato si può dimostrare, sempre nel caso $m(E) < +\infty$, che $\forall\, f \in L^\infty(E)$ risulta $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Esempio H5.3. Assumiamo $E =]0,1[$. Considerata $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in E$, si vede che $f \in L^p(E)$ se $p < 2$, ma $f \notin L^2(E)$. Si conclude allora che $L^2(E) \subset \bigcap_{p<2} L^p(E)$.
In modo analogo, usando $f(x) = |\log x|$, $x \in E$, si scopre che $L^\infty(E) \subset \bigcap_{p<+\infty} L^p(E)$.
Sia ora $f(x) = \frac{1}{x\,|\log \frac{x}{2}|^2}$, $x \in E$. Si vede che $f \in L^1(E)$, ma $f \notin L^p(E)$ se $p > 1$. Si conclude che $\bigcup_{p>1} L^p(E) \subset L^1(E)$.
Più in generale, se $m(E) < +\infty$, per $q \in]1, +\infty]$ risulta $L^q(E) \subset \bigcap_{p<q} L^p(E)$, e per $q \in [1, +\infty[$ risulta $\bigcup_{p>q} L^p(E) \subset L^q(E)$, dove le inclusioni sono strette.

-) Nel caso che E abbia misura infinita, non si può più dire che $L^s(E) \subseteq L^r(E)$ se $r < s$; infatti si è già osservato che ad esempio, posto $f(x) = \frac{1}{x^{3/4}}$, $x \in E =]1, +\infty[$, si ha che $f \in L^2(E)$ ma $f \notin L^1(E)$. E si può provare che non vale neanche l'inclusione duale $L^s(E) \supseteq L^r(E)$. Tuttavia sussiste il seguente risultato di interpolazione, valido per qualsiasi insieme misurabile.

Proposizione H5.4. *Dato E insieme misurabile e dati $1 \le r < t \le +\infty$, allora $\forall\, s \in]r,t[$ si ha che $L^r(E) \cap L^t(E) \subseteq L^s(E)$, ed inoltre, $\forall\, f \in L^r(E) \cap L^t(E)$, risulta $\|f\|_s \le \|f\|_r^\vartheta \, \|f\|_t^{1-\vartheta}$, dove $\vartheta = \frac{r(t-s)}{s(t-r)}$.*

Dim. Supponiamo dapprima $t \ne +\infty$, e consideriamo gli esponenti $p = \frac{r}{s\,\vartheta}$ e $q = \frac{t}{s\,(1-\vartheta)}$, che risultano essere coniugati. Presa $f \in L^r(E) \cap L^t(E)$, applicando la disug/za di Hölder alle funzioni $|f|^{s\vartheta} \in L^p(E)$ e $|f|^{s(1-\vartheta)} \in L^q(E)$, si calcola che $\int_E |f|^s \mathrm{d}x = \int_E |f|^{s\vartheta} |f|^{s(1-\vartheta)} \mathrm{d}x \le \||f|^{s\vartheta}\|_p \, \||f|^{s(1-\vartheta)}\|_q = (\int_E |f|^r \mathrm{d}x)^{\frac{s\vartheta}{r}} (\int_E |f|^t \mathrm{d}x)^{\frac{s(1-\vartheta)}{t}} = \|f\|_r^{s\vartheta} \|f\|_t^{s(1-\vartheta)}$; e da qui segue facilmente la tesi. Se invece si considera $t = +\infty$, si tratta di provare, presa $f \in L^r(E) \cap L^\infty(E)$, che $f \in L^s(E)$ e $\|f\|_s \le \|f\|_r^{\frac{r}{s}} \|f\|_\infty^{1-\frac{r}{s}}$; ed infatti si ha che $\int_E |f|^s \mathrm{d}x = \int_E |f|^r |f|^{s-r} \mathrm{d}x \le \operatorname*{ess\,sup}_E |f|^{s-r} \int_E |f|^r \mathrm{d}x = \|f\|_\infty^{s-r} \|f\|_r^r$ ▪

-) Dato $p \in [1, +\infty]$ e date $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $L^p(E)$ ed $f \in L^p(E)$, si dice che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge ad f in $L^p(E)$ (rispetto alla norma $\|\cdot\|_p$)* se $\exists \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_p = 0$; ciò significa, nel caso $p < +\infty$, che $\exists \lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f|^p \,\mathrm{d}x = 0$ e, se $p = +\infty$, che $\exists \lim_{k\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_E |f_k - f| = 0$.

Se l'insieme E ha misura finita, dati $1 \le r < s \le +\infty$, dal fatto che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad f in $L^s(E)$ segue che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad f in $L^r(E)$; ciò discende banalmente dalla disug/za $\|f_k - f\|_r \le \|f_k - f\|_s (m(E))^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}$ stabilita nella Propos/ne H5.3.

Tornando al caso generale, le due propos/ni seguenti mettono in relazione la convergenza rispetto alla norma $\|\cdot\|_p$, con $p\in[1,+\infty[$, e la convergenza puntuale.

Proposizione H5.5. *Siano $p\in [1,+\infty[$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una succ/ne in $L^p(E)$ ed $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Se $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad f q.o. in E e se $\exists\, \varphi \in L^p(E)$ tale che $\forall\, k\in\mathbb{N}$ $|f_k(x)| \le \varphi(x)$ per q.o. $x\in E$, allora $f\in L^p(E)$ e $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad f in $L^p(E)$.*

Dim. Dal fatto che $\forall\, k\in\mathbb{N}$ $|f_k(x)| \le \varphi(x)$ per *q.o.* $x\in E$ segue che $|f(x)|^p \le \varphi^p(x)$ per *q.o.* $x\in E$; ciò implica che $\int_E |f|^p \mathrm{d}x \le \int_E \varphi^p \mathrm{d}x < +\infty$, e quindi $f\in L^p(E)$. Posto, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $g_k = |f_k - f|^p$, si ha che $|g_k(x)| \le (|f_k(x)| + |f(x)|)^p \le 2^p \varphi^p(x)$ per *q.o.* $x\in E$; e poiché φ^p è sommabile, si può applicare alla succ/ne $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ il teorema di Lebesgue, ottenendo che $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \int_E |f_k - f|^p \mathrm{d}x = 0$ ■

Proposizione H5.6. *Siano $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ succ/ne in $\mathcal{M}(E)$ ed $f\in\mathcal{M}(E)$. Se per qualche $p\in[1,+\infty[$ $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad f in $L^p(E)$, allora $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ammette una estratta che converge ad f q.o. in E.*

La proposizione seguente mette in relazione la convergenza rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ e la convergenza uniforme.

Proposizione H5.7. *Date $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $L^\infty(E)$ ed $f \in L^\infty(E)$, si ha che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad f in $L^\infty(E)$ se e solo se $\exists\, E_0 \subseteq E$, con $m(E_0) = 0$, tale che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge unif/te ad f in $E \setminus E_0$.*

Dim. Poniamo, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $\mu_k = \operatorname{ess\,sup}\limits_E |f_k - f|$ ed $E_k = L_{\mu_k}(|f_k - f|)$; se $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \mu_k = 0$, allora, posto $E_0 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, si ha che $m(E_0) = 0$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{E\setminus E_0} |f_k - f| = 0$, essendo $\sup\limits_{E\setminus E_0} |f_k - f| \le \sup\limits_{E\setminus E_k} |f_k - f| = \mu_k$. L'implicazione inversa segue banalmente dal fatto che, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $\operatorname{ess\,sup}\limits_E |f_k - f| = \operatorname{ess\,sup}\limits_{E\setminus E_0} |f_k - f| \le \sup\limits_{E\setminus E_0} |f_k - f|$ ■

-) Si può dimostrare che, $\forall\, p\in [1,+\infty]$, *lo spazio* $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ *è uno spazio di Banach*. In particolare *lo spazio* $(L^2(E), \|\cdot\|_2)$ *è uno spazio di Hilbert*, con prodotto scalare definito, $\forall\, f, g \in L^2(E)$, da $f \cdot g = \int_E f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$, dove la sommabilità del prodotto $f\,g$ è garantita dalla disug/za di Hölder scritta con $p = q = 2$.
Considerato in particolare $E =]-\pi,\pi[$, nello spazio $(L^2(E), \|\cdot\|_2)$ il sistema ortonormale trigonometrico $\Gamma = \{\gamma_k \,/\, k\in\mathbb{N}_0\}$, costituito dalle funzioni
$\gamma_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\gamma_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x$, $\gamma_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} x$, $\gamma_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x$, $\gamma_4(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} 2x$, . . . ,
è completo, e dunque esso costituisce una base Hilbertiana dello spazio (nel senso che, per una qualsiasi $f\in L^2(E)$, la serie di Fourier di f, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (f \cdot \gamma_k)\, \gamma_k$, converge ad f).