CONFRONTI ASINTOTICI
TRA FUNZIONI

(Cosimo De Mitri)

C.d.L in Fisica

Lecce, a.a. 2014/15

CONFRONTI ASINTOTICI TRA FUNZIONI

(C. De Mitri)

1. Infinitesimi, infiniti e loro confronto

Definizione 1.1. *Siano* $f : A \subseteq I\!R \to I\!R$ *ed* $x_0 \in \overline{I\!R}$ *di accumulazione per* A, *con* $f(x) \neq 0$ *intorno ad* x_0. *Si dice che* f *è infinitesima per* $x \to x_0$ *se* $\exists \lim\limits_{x \to x_o} |f(x)| = 0$; *si dice che* f *è infinita per* $x \to x_0$ *se* $\exists \lim\limits_{x \to x_o} |f(x)| = +\infty$.

In modo analogo si possono definire le nozioni di funzione inf/ma o inf/ta per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0^+$. Estensioni come questa si potranno fare (ma noi le lasceremo sottintese) anche per le definizioni che saranno date in seguito.

Esempi.

1) $\frac{1}{x}$ è inf/ma per $x \to \pm\infty$ ed è inf/ta per $x \to 0$.

2) $e^{\frac{1}{x}}$ è inf/ma per $x \to 0^-$, inf/ta per $x \to 0^+$.

Definizione 1.2. *Se* f *e* g *sono inf/me per per* $x \to x_0$, *si dice che* f *è inf/mo d'ordine superiore rispetto a* g *se* $\exists \lim\limits_{x \to x_o} |\frac{f(x)}{g(x)}| = 0$.
Se f *e* g *sono inf/te per per* $x \to x_0$, *si dice che* f *è inf/to d'ordine superiore rispetto a* g *se* $\exists \lim\limits_{x \to x_o} |\frac{f(x)}{g(x)}| = +\infty$.
Se f *e* g *sono entrambe inf/me o entrambe inf/te per* $x \to x_0$, *si dice che* f *e* g *sono inf/mi o inf/ti dello stesso ordine se* $\exists \lim\limits_{x \to x_o} |\frac{f(x)}{g(x)}| \in I\!R^+$, *oppure, più in generale, se esistono* $h, k \in I\!R^+$ *tali che* $h \leq |\frac{f(x)}{g(x)}| \leq k$ *intorno ad* x_0.
Infine, se f *e* g *sono entrambe inf/me o entrambe inf/te per* $x \to x_0$ *e nessuna delle precedenti condizioni è soddisfatta, si dice che* f *e* g *sono inf/mi o inf/ti tra loro non confrontabili.*

Esempi.

1) $1 - \cos x$ è inf/mo d'ordine superiore rispetto ad x per $x \to 0$, ed è inf/mo dello stesso ordine rispetto ad x^2 per $x \to 0$.

2) $(1 + \mathrm{sen}^2\, n)n$ è inf/to dello stesso ordine di n per $n \to \infty$.

3) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in Q \\ x^3 & \text{se } x \notin Q \end{cases}$ e $g(x) = x^2$ sono, per $x \to 0$, due inf/mi tra loro non confrontabili.

Osservazione 1.1. Se f e g sono inf/me per $x \to x_0$, le funzioni $\frac{1}{f}$ e $\frac{1}{g}$, che sono inf/te per $x \to x_0$, stanno fra loro nello stesso rapporto gerarchico in cui sono f e g.
Analogo discorso vale nel caso che f e g siano inf/te per $x \to x_0$.

•) Se $x_0 \in \mathbb{R}$, come inf/mi e come inf/ti di riferimento per $x \to x_0$ si usano in genere rispettivamente le funzioni $|x - x_0|^\alpha$ e $\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
Se invece $x_0 = \pm\infty$, come inf/mi e come inf/ti di riferimento per $x \to x_0$ si assumono in genere rispettivamente le funzioni $\frac{1}{|x|^\alpha}$ e $|x|^\alpha$, sempre con $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
Nel seguito, per brevità, con u^α indicheremo l'inf/mo o l'inf/to campione, a seconda dei casi.
Con tali convenzioni, l'espressione "f è inf/mo d'ordine superiore rispetto ad u^α per $x \to x_0$" potrà essere abbreviata così: "*f è inf/mo d'ordine maggiore di α per $x \to x_0$*". Analogamente, invece di dire "f è inf/to dello stesso ordine rispetto ad u^α per $x \to x_0$", diremo: "*f è inf/to d'ordine α per $x \to x_0$*". E così di seguito.

Esempi.

1) $1 - \cos x$ è un inf/mo d'ordine 2 per $x \to 0$.

2) $(1 + \operatorname{sen}^2 n)n$ è un inf/to d'ordine 1 per $n \to \infty$.

Osservazione 1.2. Data f inf/ma o inf/ta per $x \to x_0$, non è detto che essa debba essere necessariamente *dotata di ordine*, cioè che esista $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tale che f sia inf/ma o inf/ta d'ordine α per $x \to x_0$. Gli esempi riportati qui di seguito mostrano inf/mi o inf/ti non dotati di ordine. Gli inf/mi e gli inf/ti dei primi tre esempi sono detti anche inf/mi o inf/ti d'*ordine iperreale.*

Esempi.

1) Per $x \to -\infty$ e^x è inf/mo d'ordine maggiore di α $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ (*inf/mo d'ordine inf/te grande*).
Per $x \to +\infty$ e^x è inf/to d'ordine maggiore di α $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ (*inf/to d'ordine inf/te grande*).
In casi come questi si parla anche di inf/mi e di inf/ti d'*ordine sovrareale.*

2) Per $x \to 0$ ed anche per $x \to +\infty$ $\log x$ è inf/to d'ordine minore di α $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ (*inf/to d'ordine inf/te piccolo*); ovviamente $\frac{1}{\log x}$ è un inf/mo d'ordine minore di α $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ (*inf/mo d'ordine inf/te piccolo*).
In casi come questi si parla anche di inf/mi e di inf/ti d'*ordine sottoreale.*

3) Per $x \to 0$ $x \log x$ è inf/mo d'ordine minore di 1 e maggiore di α $\forall \alpha < 1$; invece per $x \to +\infty$ $x \log x$ è inf/to d'ordine maggiore di 1 e minore di α $\forall \alpha > 1$.
In casi come questi si parla anche di inf/mi e di inf/ti d'*ordine infrareale.*

4) Posto $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in Q \\ x^2 & \text{se } x \notin Q \end{cases}$, si riconosce che per $x \to 0$ f è un inf/mo non dotato di ordine. Invero: preso $\alpha < 1$, f è inf/mo d'ordine maggiore di α; preso $1 \le \alpha \le 2$, f non è né d'ordine minore, né d'ordine uguale, né d'ordine maggiore di α; infine, se $\alpha > 2$, f è inf/mo d'ordine minore di α.

5) La funzione $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$ si comporta, per $x \to 0$, come la precedente; tuttavia qui f è inf/mo d'ordine 1 per $x \to 0^-$ e inf/mo d'ordine 2 per $x \to 0^+$.

Proposizione 1.1. (Comportamento di $\log g$ con g inf/to o inf/mo).
Se $\exists \beta \in \mathbb{R}^+$ tale che g sia un inf/to o un inf/mo d'ordine minore o uguale a β per $x \to x_0$, allora $\log g$ è un inf/to d'ordine inf/te piccolo per $x \to x_0$.

Dim. Sia g un inf/to tale che $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(u(x))^\beta} = 0$. Preso $\alpha \in \mathbb{R}^+$, si riconosce che $\lim_{x\to x_0} \frac{\log g(x)}{(u(x))^\alpha} = \lim_{x\to x_0} \frac{\log g(x)}{(g(x))^{\alpha/\beta}} \left(\frac{g(x)}{(u(x))^\beta}\right)^{\alpha/\beta} = 0$. Se g è un inf/to d'ordine β, ci si rifà al caso già provato osservando che g è inf/to d'ordine minore di $\frac{3}{2}\beta$. Se infine g è un inf/mo d'ordine minore o uguale a β, basta osservare che $\log g = -\log \frac{1}{g}$ e che $\frac{1}{g}$ è un inf/to d'ordine minore o uguale a β ▪

Esempi.

1) $\log\log x$ ed anche $\log(1+3x^4)$ per $x \to +\infty$ sono infiniti d'ordine inf/te piccolo.

2) $\log(1-\cos x)$ per $x \to 0$ è inf/to d'ordine inf/te piccolo.

3) La Propos.1.1 non è applicabile al caso della funzione $\log e^x$ per $x \to +\infty$, poiché l'argomento e^x è un inf/to d'ordine inf/te grande per $x \to +\infty$.

Proposizione 1.2. (Comportamento di e^g con g inf/to positivo o inf/to negativo).
Se $\exists\, \beta \in \mathbb{R}^+$ tale che g sia un inf/to positivo [negativo] d'ordine maggiore o uguale a β per $x \to x_0$, allora e^g è un inf/to [un inf/mo] d'ordine inf/te grande per $x \to x_0$.

Dim. Sia g un inf/to positivo tale che $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(u(x))^\beta} = +\infty$. Preso $\alpha \in \mathbb{R}^+$, si riconosce che $\lim_{x\to x_0} \frac{e^{g(x)}}{(u(x))^\alpha} = \lim_{x\to x_0} \frac{e^{g(x)}}{(g(x))^{\alpha/\beta}} \left(\frac{g(x)}{(u(x))^\beta}\right)^{\alpha/\beta} = +\infty$. Se g è un inf/to positivo d'ordine β, ci si rifà al caso già provato osservando che g è un inf/to d'ordine maggiore di $\frac{1}{2}\beta$.
Se g è un inf/to negativo d'ordine maggiore o uguale a β, basterà osservare che $e^g = \frac{1}{e^{-g}}$ e che $-g$ è un inf/to positivo d'ordine maggiore o uguale a β ▪.

Esempi.

1) Per $x \to 0$ $e^{\frac{1}{x^2}}$ è un inf/to d'ordine inf/te grande, mentre $e^{-\frac{1}{x^2}}$ è un inf/mo d'ordine inf/te grande.

2) La Propos.1.2 non è applicabile al caso della funzione $e^{\log x}$ per $x \to +\infty$, poiché l'argomento $\log x$ è un inf/to d'ordine inf/te piccolo per $x \to +\infty$.

2. Confronti asintotici tra funzioni

Siano f e g due funzioni reali tali che f/g e g/f abbiano lo stesso dominio $A \subseteq \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A.

Definizione 2.1. *Si dice che f è trascurabile rispetto a g per $x \to x_0$, e si scrive $f(x) = o(g(x))$ (leggi $f(x)$ è o piccolo di $g(x)$) per $x \to x_0$, se $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

Osservazione 2.1. Se f e g sono entrambi inf/mi per $x \to x_0$, il fatto che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ equivale al fatto che f è un inf/mo d'ordine superiore rispetto a g per $x \to x_0$. Pertanto ogni inf/mo è trasc/le rispetto ad ogni inf/mo d'ordine inferiore.
Se f e g sono entrambi inf/ti per $x \to x_0$, il fatto che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ equivale al fatto che f è un inf/to d'ordine inferiore rispetto a g per $x \to x_0$. Pertanto ogni inf/to è trasc/le rispetto ad ogni inf/to d'ordine superiore.

Esempi.

1) Dati $0 < a < b$, si riconosce che $a^x = o(b^x)$ per $x \to +\infty$ e $b^x = o(a^x)$ per $x \to -\infty$.

2) Dati $\alpha < \beta$, si ha che $|x|^\alpha = o(|x|^\beta)$ per $x \to \pm\infty$ e $|x|^\beta = o(|x|^\alpha)$ per $x \to 0$.

3) Ogni inf/mo è trasc/le rispetto ad ogni funzione avente limite finito e diverso da 0.

4) Ogni funzione limitata intorno ad x_0 è trasc/le rispetto ad ogni infinito.

Notazione. In genere si scrive "$f(x) = f_1(x) + o(g(x))$" al posto di $f(x) - f_1(x) = o(g(x))$. Così ad esempio le espressioni $\cos x = 1 + o(x)$ e $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ per $x \to 0$ stanno a significare rispettivamente che $\cos x - 1 = o(x)$ e $\sqrt{1+x^2} - 1 - \frac{1}{2}x^2 = o(x^3)$ per $x \to 0$.

Proposizione 2.1. (L'algebra di o).

a) $\begin{pmatrix} f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0 \\ g(x) = o(h(x)) \text{ per } x \to x_0 \end{pmatrix} \implies (\, f(x) = o(h(x)) \text{ per } x \to x_0 \,)$.

In breve: $o(o(h)) = o(h)$.

b) $(\, f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0 \,) \implies (\, h(x)f(x) = o(h(x)g(x)) \text{ per } x \to x_0 \,)$.

In breve: $h(o(g)) = o(hg)$.

c) $\begin{pmatrix} f_1(x) = o(g_1(x)) \text{ per } x \to x_0 \\ f_2(x) = o(g_2(x)) \text{ per } x \to x_0 \end{pmatrix} \implies (\, f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x)) \text{ per } x \to x_0 \,)$.

In breve: $o(g_1)\, o(g_2) = o(g_1 g_2)$.

d) $\begin{pmatrix} f_1(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0 \\ f_2(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0 \end{pmatrix} \implies (\, f_1(x) \pm f_2(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0 \,)$.

In breve: $o(g) \pm o(g) = o(g)$.

e) $\begin{pmatrix} f(y) = o(g(y)) \text{ per } y \to y_0 \\ \varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} y_0 \text{ con } \varphi(x) \neq y_0 \text{ intorno ad } x_0 \end{pmatrix} \implies (\, f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x)) \text{ per } x \to x_0 \,)$.

Esempio. Dato che $1 - \cos x = o(x)$ per $x \to 0$, per la (b) si ha che $x(1 - \cos x) = o(x^2)$ per $x \to 0$, per la (c) si ha che $(1 - \cos x)^2 = o(x^2)$ per $x \to 0$ e per la (e) si ha che $1 - \cos \mathrm{e}^{-x} = o(\mathrm{e}^{-x})$ per $x \to +\infty$.

Definizione 2.2. *Si dice che f è dominata da g per $x \to x_0$, e si scrive $f(x) = O(g(x))$ (leggi $f(x)$ è O grande di $g(x)$) per $x \to x_0$, se $\exists\, k \in \mathbb{R}^+ |\frac{f(x)}{g(x)}| \leq k$ intorno ad x_0.*

Si riconosce che questa condizione è in particolare soddisfatta se $\exists \lim\limits_{x \to x_o} |\frac{f(x)}{g(x)}| \in \mathbb{R}$, e quindi più in particolare se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$.

Definizione 2.3. *Si dice che f è equivalente o asintotica a g per $x \to x_0$, e si scrive $f(x) \simeq g(x)$ per $x \to x_0$, se $\exists \lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, ossia se $f(x) = g(x) + o(g(x))$ per $x \to x_0$.*

Esempi.

1) $\operatorname{sen} x, \operatorname{tg} x, \operatorname{arcsen} x, \operatorname{arctg} x \simeq x$ per $x \to 0$; $\quad 1 - \cos x \simeq \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$;
$\log_a (1+x) \simeq \frac{x}{\log a}$ per $x \to 0$; $\quad a^x - 1 \simeq x \log a$ per $x \to 0$;
$(1+x)^\alpha - 1 \simeq \alpha x$ per $x \to 0$ $(\alpha \neq 0)$.

2) $\sqrt[n]{n!} \simeq \frac{n}{e}$ per $n \to \infty$; $\log n! \simeq n \log n$ per $n \to \infty$.

3) $\operatorname{arctg} x \simeq \frac{\pi}{2}$ per $x \to +\infty$. Più in generale, ogni funzione che abbia limite l finito e diverso da 0 è equivalente al suo limite, ossia alla funzione avente valore costante l intorno ad x_0.

Alcune proprietà

a) *Se* $f(x) \simeq g(x)$ *in* x_0, *allora i limiti* $\lim_{x\to x_o} f(x)$ *e* $\lim_{x\to x_o} g(x)$ *o non esistono entrambi oppure esistono entrambi e sono uguali.*

b) *Se* $\varphi(x) = o(f(x))$ *in* x_0, *allora* $f(x) + \varphi(x) \simeq f(x)$ *in* x_0.
In breve: $f + o(f) \simeq f$.

Ne consegue che *una qualsiasi somma contenente un termine rispetto al quale tutti gli altri sono trascurabili è equivalente al termine suddetto.*

Esempi.

1) $x + \log x \simeq x$ per $x \to +\infty$. $x + \frac{1}{\log x} \simeq \frac{1}{\log x}$ per $x \to 0$.

2) $x + \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{tg} x^2 \simeq x$ per $x \to 0$.

c) (Compatibilità rispetto alle sostituzioni).

$$\left(\begin{array}{l} g_1(y) \simeq g_2(y) \textit{ in } y_0 \\ f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} y_0 \textit{ con } f(x) \neq y_0 \textit{ intorno ad } x_0 \end{array} \right) \Longrightarrow \left(g_1(f(x)) \simeq (g_2(f(x)) \textit{ in } x_0 \right).$$

Esempi.

1) Considerato che $\log(1+y) \simeq y$ per $y \to 0$, si ha che $\log \cos x = \log(1 + \cos x - 1) \simeq \cos x - 1 \simeq -\frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$.

2) Da $y^2 + 3y - 1 \simeq y^2$ per $y \to -\infty$ segue che $\log^2 x + 3\log x - 1 \simeq \log^2 x$ per $x \to 0$.

Il fatto che $f_1(x) \simeq f_2(x)$ in x_0 non consente di affermare che $h(f_1(x)) \simeq h(f_2(x))$ in x_0.
Invero si riconosce che $e^{x+\log x} \not\simeq e^x$ per $x \to +\infty$, anche se $x + \log x \simeq x$ per $x \to +\infty$.
Ed ancora $\log \cos x \not\simeq \log e^x$ per $x \to 0$, anche se $\cos x \simeq e^x$ per $x \to 0$.
Vi sono tuttavia dei casi in cui l'implicazione sussiste, come mostrano ad esempio i successivi punti (d) ed (e).

d) *Se* $f_1(x) \simeq f_2(x)$ *in* x_0, *allora* $(f_1(x))^\alpha \simeq (f_2(x))^\alpha$ *in* x_0 $(\alpha \in \mathbb{R})$.

In particolare ($\alpha = -1$), da $f_1(x) \simeq f_2(x)$ *in* x_0 segue che $\frac{1}{f_1(x)} \simeq \frac{1}{f_2(x)}$ *in* x_0.

Esempio. Da $1 - \cos x \simeq \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$ segue che $\sqrt{1 - \cos x} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}|x|$ per $x \to 0$.

e) *Se* f_1 *e* f_2 *sono due inf/ti o due inf/mi dello stesso ordine in* x_0, *allora* $\log f_1(x) \simeq \log f_2(x)$ *in* x_0.

Invero, considerato che la funzione $\log \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ è limitata intorno ad x_0, si ha che $\lim_{x\to x_o} \frac{\log f_1(x)}{\log f_2(x)} = \lim_{x\to x_o} \left(1 + \frac{1}{\log f_2(x)} \log \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = 1$.

Esempio. $\log(x^2 + 3x) \simeq \log x$ per $x \to 0$, ed ancora $\log(x^2 + 3x) \simeq \log x^2$ per $x \to +\infty$.

f) (Compatibilità rispetto alle moltiplicazioni ed alle divisioni).

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \simeq g_1(x) \ \textit{in } x_0 \\ f_2(x) \simeq g_2(x) \ \textit{in } x_0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} f_1(x)f_2(x) \simeq g_1(x)g_2(x) \ \textit{in } x_0 \\ \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \simeq \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \ \textit{in } x_0 \end{pmatrix}$$

Invece non sempre l'equivalenza è compatibile rispetto alle addizioni e sottrazioni.
Ad esempio si ha che $\sqrt{x^2+1} \simeq x+1$ e $x \simeq x$ per $x \to +\infty$, ma $\sqrt{x^2+1} - x \not\simeq (x+1) - x$ per $x \to +\infty$.

g) (Comportamento rispetto alle addizioni ed alle sottrazioni).

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \simeq l_1\varphi(x) \ \textit{in } x_0 \\ f_2(x) \simeq l_2\varphi(x) \ \textit{in } x_0 \end{pmatrix} \implies \left(f_1(x) \pm f_2(x) \begin{cases} \simeq (l_1 \pm l_2)\varphi(x) \ \textit{in } x_0 & \textit{se } l_1 \pm l_2 \neq 0 \\ = o(\varphi(x)) \quad \textit{in } x_0 & \textit{se } l_1 \pm l_2 = 0 \end{cases} \right).$$

Esempi.

1) $e^{x^2} - \cos x = (e^{x^2} - 1) + (1 - \cos x) \simeq (1 + \frac{1}{2})x^2 = \frac{3}{2}x^2$ per $x \to 0$.

2) $\sqrt{2n^2+1} - n \simeq (\sqrt{2} - 1)n$ per $n \to \infty$.

3) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x = o(x)$ per $x \to 0$.
Invero $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x(1 - \cos x) \simeq \frac{1}{2}x^3$ per $x \to 0$.

4) $\sqrt[3]{x^3+2} - x = o(x)$ per $x \to +\infty$.
Invero $\sqrt[3]{x^3+2} - x = x\left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}} - 1\right) \simeq \frac{2}{3}\frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$.

5) $\log(1 + e^x) - x = o(x)$ per $x \to +\infty$.
Invero $\log(1 + e^x) - x = \log\frac{1+e^x}{e^x} = \log(1 + e^{-x}) \simeq e^{-x}$ per $x \to +\infty$.

3. Parte principale di un infinitesimo e di un infinito

Indicheremo ancora con $u(x)$ l'inf/mo [l'inf/to] campione per $x \to x_0$.
Se f è tale che $|f(x)| \simeq l(u(x))^\alpha$ per $x \to x_0$, con $l \in \mathbb{R}^+$, evidentemente f è inf/mo [inf/to] per $x \to x_0$ d'ordine α. In tal caso risulta $f(x) \simeq l(u(x))^\alpha \operatorname{sgn} f(x)$ per $x \to x_0$, ed il secondo membro prende il nome di *parte principale* dell'inf/mo [inf/to] f.

Esempi.

1) L'inf/mo $1 - \cos x$ per $x \to 0$ ha p.p. $\frac{1}{2}x^2$.

2) L'inf/mo $\sqrt{1 - \cos x}$ per $x \to 0$ ha p.p. $\frac{1}{\sqrt{2}}|x|$.

3) L'inf/mo $\arccos x$ per $x \to 1^-$ ha p.p. $\sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}$.
Invero $\arccos x \simeq \operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x}\,\sqrt{1-x} \simeq \sqrt{2}\,(1-x)^{\frac{1}{2}}$ per $x \to 1^-$.

4) L'inf/to $\frac{1}{\log x}$ per $x \to 1$ ha p.p. $\frac{1}{x-1}$.

La proposizione che segue è conseguenza della proprietà (g) del paragrafo precedente.

Proposizione 3.1. *Se f_1 ed f_2 sono due inf/mi [inf/ti] per $x \to x_0$ aventi lo stesso segno intorno ad x_0, dotati dello stesso ordine ma con parti principali diverse, allora la loro differenza $f_1 - f_2$ è ancora un inf/mo [inf/to] per $x \to x_0$ avente lo stesso ordine e, come parte principale, la differenza delle parti principali.*