[(1)]In relazione alla funzione

$f(x)=\dfrac{x-3}{(x+1)^2}$ risolvere i quesiti che seguono.

1) Si trovi una sua primitiva nell'intervallo]-1;+∞[.
2) Si calcoli il suo integrale definito relativamente all'intervallo [0;4].
3) Sia F:]-1;+∞[→R definita da $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. Si trovino eventuali punti di massimo e di minimo di F.
4) Si determini il comportamento di F per x→+∞

Elaborazioni

1) Si deve calcolare l'integrale indefinito $\int \dfrac{x-3}{(x+1)^2}dx$. Si riconosce che la funzione integranda si può scrivere nella seguente forma $\dfrac{x-3}{(x+1)^2}=\dfrac{k(2x+2)+h}{x^2+2x+1}$, con $k=\dfrac{1}{2}$ e $h=-4$, per cui l'integrale si esprime come di seguito indicato:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x+1)^2}dx-\int \frac{4}{(x+1)^2}dx=\frac{1}{2}\ln(x+1)^2+\frac{4}{x+1}+C=\ln(x+1)+\frac{4}{x+1}+C$$

Osserviamo che è stato omesso il simbolo di modulo nell'argomento della funzione logaritmo perché il calcolo si riferisce ai valori della variabile x>-1.

Considerato che si richiede una primitiva della funzione $f(x)$ si può scegliere

$$P(x)=\ln(x+1)+\frac{4}{x+1}$$

2) Calcolo dell'integrale definito $\int_0^4 f(x)dx=\left[\ln(x+1)+\dfrac{4}{x+1}\right]_0^4=\left[\ln(5)+\dfrac{4}{5}\right]-\left[\ln(1)+4\right]=$

$\ln(5)-\dfrac{16}{5}$

3) La funzione F(x) definita è la funzione integrale della funzione f(x) di punto iniziale x=0, con x variabile nell'intervallo]-1;+∞[. E' noto che risulta

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \frac{t-3}{(t+1)^2}dt=\left[\ln(t+1)+\frac{4}{t+1}\right]_0^x=\ln(x+1)+\frac{4}{x+1}-4$$

a. Ricerca di eventuali punti di massimo o di minimo di F(x).

[(1)] Esercizio n.1 presente nella scheda Matematica Applicata 30063, Esercizi riepilogativi A.A.2016/17 -1 Calcolo integrale UniBocconi

Si devono studiare il segno e gli zeri della funzione derivata prima. Poiché, per x>-1, risulta $F'(x)=f(x)=\frac{x-3}{(x+1)^2}\geq 0$, e la disuguaglianza è soddisfatta per x≥3, deduciamo che la funzione F(x) ha derivata prima negativa per -1<x<3, positiva per x>3 e nulla nel punto x=3; pertanto il punto x=3 è di minimo relativo, nonché assoluto per la funzione.

Inoltre, la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo]-1;3[, strettamente crescente nell'intervallo]3;+∞[e risultando

$$\lim_{x\to(-1)^+}\left[\ln(x+1)+\frac{4}{x+1}-4\right]=+\infty \text{ e}$$

4) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)+\frac{4}{x+1}-4\right]=+\infty+0-4=+\infty \qquad (*)$$

si conclude che la funzione F(x) non è limitata superiormente e non ammette massimo, né punti di massimo relativo nell'intervallo considerato.

Osservazione

Per il primo dei due limiti (*) si tenga presente il limite notevole $\lim_{y\to0^+} y^r\ln(y)=0$, $\forall r>0$ dopo aver sommato i primi due termini:

$$\lim_{x\to(-1)^+}\left[\frac{(x+1)\ln(x+1)+4}{x+1}-4\right]=\frac{0+4}{0^+}-4=+\infty$$

Ulteriori informazioni e grafico di F(x)

La funzione F(x) ha come derivata seconda $F''(x)=\frac{7-2x}{(x+1)^3}$ che è positiva per -1<x<7/2, si annulla in x=7/2, è negativa per x>7/2; il punto x=7/2 è di flesso e risulta F(7/2)=-1,607.

Riportiamo a margine il diagramma della funzione y=F(x). Si osservi che la funzione si annulla nei punti x=0 e x≈49,44.