Studio del limite[1]

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-8n+7}{n^2+3n-9}\right)^{n^2-6}$$

Elaborazioni

1) Il limite si presenta nella forma indeterminata $1^{+\infty}$.
2) Si può studiare il limite passando alla forma esponenziale-logaritmica ponendo

$$\left(\frac{n^2-8n+7}{n^2+3n-9}\right)^{n^2-6}=e^{\log\left(\frac{n^2-8n+7}{n^2+3n-9}\right)^{n^2-6}}=e^{\left(n^2-6\right)\log\left(\frac{n^2-8n+7}{n^2+3n-9}\right)}$$

3) Studio del limite dell'esponente

Osserviamo che $\frac{n^2-8n+7}{n^2+3n-9}=1+\frac{16-11n}{n^2+3n-9}$ e che $\lim_{n\to+\infty}\frac{16-11n}{n^2+3n-9}=0$.

Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^2-6\right)\log\left(1+\frac{16-11n}{n^2+3n-9}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(n^2-6\right)\cdot\frac{\log\left(1+\frac{16-11n}{n^2+3n-9}\right)}{\frac{16-11n}{n^2+3n-9}}\cdot\frac{16-11n}{n^2+3n-9}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(n^2-6\right)(16-11n)}{n^2+3n-9}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{16-11n}{n^2+3n-9}\right)}{\frac{16-11n}{n^2+3n-9}}.$$

Dal limite notevole $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$ segue che $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{16-11n}{n^2+3n-9}\right)}{\frac{16-11n}{n^2+3n-9}}=1$ e quindi il limite in oggetto si riduce al a seguente

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(n^2-6\right)(16-11n)}{n^2+3n-9}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(1-\frac{6}{n^2}\right)\left(\frac{16}{n}-11\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{9}{n^2}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(1-\frac{6}{n^2}\right)\left(\frac{16}{n}-11\right)}{\left(1+\frac{3}{n}-\frac{9}{n^2}\right)}=\frac{+\infty\cdot1\cdot(-11)}{1}=-\infty$$

4) Valore del limite – Conclusione

Il limite in esame esiste e vale

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-8n+7}{n^2+3n-9}\right)^{n^2-6}=\lim_{n\to+\infty}e^{\left(n^2-6\right)\log\left(\frac{n^2-8n+7}{n^2+3n-9}\right)}=\lim_{y\to-\infty}e^y=e^{-\infty}=0^+$$

[1] Limite assegnato nella prova d'esame di Matematica Generale per Economia, il 9-11-2015- Lecce

Osservazione

Il limite in oggetto si può studiare diversamente passando al continuo e applicando la regola di de l'Hôpital. Il procedimento è però più farraginoso. Riportiamo di seguito le elaborazioni senza ulteriori commenti.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-8x+7}{x^2+3x-9}\right)^{x^2-6}=\lim_{x\to+\infty}e^{\left(x^2-6\right)\log\left(\frac{x^2-8x+7}{x^2+3x-9}\right)}$$

Studio del limite dell'esponente che si presenta nella forma $\infty\cdot 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-6\right)\log\left(\frac{x^2-8x+7}{x^2+3x-9}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{x^2-8x+7}{x^2+3x-9}\right)}{\left(x^2-6\right)^{-1}}\overset{H.}{=}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+3x-9}{x^2-8x+7}\cdot\frac{(2x-8)\left(x^2+3x-9\right)-\left(x^2-8x+7\right)(2x+3)}{\left(x^2+3x-9\right)^2}}{-\left(x^2-6\right)^{-2}\cdot 2x}=\ldots=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(11x^2-32x+51\right)\left(x^2-6\right)^2}{-2x\left(x^2-8x+7\right)\left(x^2+3x-9\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6\left(11-\frac{32}{x}+\frac{51}{x^2}\right)\left(1-\frac{6}{x^2}\right)^2}{-2x^5\left(1-\frac{8}{x}+\frac{7}{x^2}\right)\left(1+\frac{3}{x}-\frac{9}{x^2}\right)}=\frac{+\infty\cdot 11\cdot 1}{-2\cdot 1\cdot 1}=-\infty$$

A questo punto per il limite in esame si rinvia alla conclusione riportata nel precedente punto 4).