Studio dell'integrale generalizzato

$\int_{-1}^{0}\left(x^2-4\right)\log\left(x+1\right)dx$ [1]

Elaborazioni

La funzione integranda non è definita nel punto x=-1; il suo dominio è D=]-1;+∞[. Si deve studiare il seguente limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\left(x^2-4\right)\log\left(x+1\right)dx$$

.

Occupiamoci dell'integrale indefinito associato $\int\left(x^2-4\right)\log\left(x+1\right)dx$ che va calcolato applicando il metodo di integrazione per parti considerando come fattore differenziale il polinomio. Risulta:

$$\int\left(x^2-4\right)\log\left(x+1\right)dx=\int D\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\log\left(x+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\log\left(x+1\right)-\int\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\cdot\frac{1}{x+1}dx=$$

$$\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\log\left(x+1\right)-\frac{1}{3}\int\frac{x^3-12x}{x+1}dx$$

Per l'integrale residuo si esegue la divisione $\left(x^3-12x\right):\left(x+1\right)$ ottenendo come quoziente $Q\left(x\right)=x^2-x-11$ e resto $\mathrm{R}=11$. Procediamo con l'integrale residuo.

$$-\frac{1}{3}\int\frac{x^3-12x}{x+1}dx=-\frac{1}{3}\int\left(x^2-x-11+\frac{11}{x+1}\right)dx=-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-11x+11\cdot\log\left(x+1\right)\right]+c$$

In conclusione si ha

$$\int\left(x^2-4\right)\log\left(x+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\log\left(x+1\right)-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-11x+11\cdot\log\left(x+1\right)\right]+c$$

Studio dell'integrale generalizzato

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\left(x^2-4\right)\log\left(x+1\right)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\log\left(x+1\right)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}+\frac{11}{3}x-\frac{11}{3}\cdot\log\left(x+1\right)\right]_{-1+\varepsilon}^{0}=$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{0-\left[\frac{\left(-1+\varepsilon\right)^3}{3}-4\left(-1+\varepsilon\right)\right]\log\varepsilon+\frac{\left(-1+\varepsilon\right)^3}{9}-\frac{\left(-1+\varepsilon\right)^2}{6}-\frac{11}{3}\left(-1+\varepsilon\right)+\frac{11}{3}\cdot\log\varepsilon\right\}=$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\left(-1+\varepsilon\right)^3}{9}-\frac{\left(-1+\varepsilon\right)^2}{6}-\frac{11}{3}\left(-1+\varepsilon\right)+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{\left(-1+\varepsilon\right)^3}{3}+4\left(-1+\varepsilon\right)+\frac{11}{3}\right]\log\varepsilon=\left(-\frac{1}{9}-\frac{1}{6}+\frac{11}{3}\right)+$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{3}\left(-\varepsilon^2+3\varepsilon+9\right)\varepsilon\cdot\log\varepsilon=\frac{61}{18}+0=\frac{61}{18}$$

[1] Integrale simile nella prova d'esame di Matematica del 3-02-2014, CDL Economia, Lecce

Osservazione

Nello scrivere il valore zero per il limite $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{3}\left(-\varepsilon^2+3\varepsilon+9\right)\varepsilon\cdot\log\varepsilon$ si è tenuto presente il limite notevole

$\lim_{x\to 0^+} x^r \log_a x = 0$, valido per ogni $a>0$ e diverso da uno.

Del resto il lettore che non conosca detto limite notevole può calcolarlo trasformandolo nella forma ∞/∞ e applicando una sola volta la regola di de l'Hôpital.

Concludiamo che l'integrale generalizzato converge e quindi la funzione integranda è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo]-1;0].

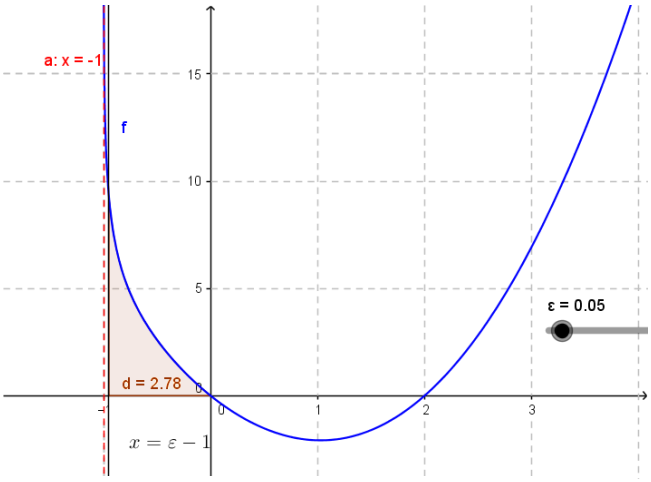


Figura 1- Nella finestra grafica è riportato il valore dell'integrale definito della funzione in oggetto relativamente all'intervallo chiuso [-1+ε ; 0] con ε = 0,05.