Studio di funzione[1]

Studiare la funzione che segue precisando il dominio, il segno, gli eventuali asintoti e i punti di massimo o di minimo relativo o assoluto.

$$f\left(x\right)=\sqrt[3]{x^4-x^2-2}$$

Elaborazioni

1) **Dominio –** La radice di indice dispari è definita su tutto l'asse reale e poiché il radicando è un polinomio che esiste per ogni x reale il dominio della funzione è R.
2) **Parità**- La funzione è pari perché nella sua forma algebrica compaiono solo potenze della variabile con esponente pari e quindi sussiste l'uguaglianza f(-x)=f(x); ciò implica che il diagramma della funzione è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.
3) **Segno e zeri**

   La funzione in esame ha il segno del radicando e si annulla quando si annulla quest'ultimo. Studiamo dunque la disequazione biquadratica $x^4-x^2-2\geq 0$.

   Ponendo $x^2=t$ si passa alla disequazione ausiliaria $t^2-t-2\geq 0$; le radici dell'equazione associata sono t_1=-1, t_2=2. La disequazione di secondo grado è soddisfatta per i valori di *t* tali che $\left(t\leq -1\right)\vee\left(t\geq 2\right)$. Tornando all'incognita x deve risultare $\left(x^2\leq -1\right)\vee\left(x^2\geq 2\right)$; la prima disuguaglianza evidentemente non è soddisfatta per alcun valore reale, rimane la seconda che è soddisfatta per i valori reali di x appartenenti all'insieme $S=\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$.

   Concludiamo che:

   - $f\left(x\right)>0$, per $\left(x<-\sqrt{2}\right)\vee\left(x>\sqrt{2}\right)$;
   - $f\left(x\right)=0$, per $\left(x=-\sqrt{2}\right)\vee\left(x=\sqrt{2}\right)$;
   - $f\left(x\right)<0$ negli altri punti del dominio di definizione.

4) **Asintoti –** La funzione è irrazionale intera e nel suo dominio è continua. Non ammette asintoti verticali. Inoltre, considerato che il radicando è un polinomio di quarto grado, per $x\to\pm\infty$ il diagramma della funzione è asintotico a quello della funzione $y=x^{\frac{4}{3}}$. Dunque non esistono rette che siano asintoti orizzontali o obliqui.
5) **Monotonia, punti di massimo e di minimo**

   La funzione derivata prima è $f'\left(x\right)=\dfrac{2x\left(2x^2-1\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^4-x^2-2\right)^2}}$

   ed esiste per ogni x reale diverso dai valori $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$; per questi punti svilupperemo più avanti delle considerazioni particolari.

[1] Esercizio assegnato nella prova d'esame di Matematica del 2/09/2014, Corso di Laurea in Economia, Lecce

Segno della derivata prima.

Risulta $f'(x)>0$ per $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<0\right)\vee\left(\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\sqrt{2}\right)\vee\left(x>\sqrt{2}\right)$.

Gli zeri della derivata prima sono $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$; i punti x_1, x_3 sono di minimo relativo, nonché assoluto, ed il punto x_2 è di massimo relativo; i rispettivi valori della funzione sono:

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\simeq -1,310;\ f(0)=\sqrt[3]{-2}\simeq -1,260.$$

6) **Approfondimento** - Comportamento del diagramma della funzione in un intorno dei punti $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$.

Studio del limite della derivata prima in ciascuno dei due punti indicati.

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} f'(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{2x\left(2x^2-1\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^4-x^2-2\right)^2}}=\frac{6\sqrt{2}}{0^+}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}} f'(x)=\lim_{x\to-\sqrt{2}}\frac{2x\left(2x^2-1\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^4-x^2-2\right)^2}}=\frac{-6\sqrt{2}}{0^+}=-\infty$$

I valori ottenuti indicano che nel punto $\left(\sqrt{2};0\right)$ del grafico la retta tangente è $x=\sqrt{2}$; così, nel punto $\left(-\sqrt{2};0\right)$ la retta tangente è $x=-\sqrt{2}$. Queste informazioni permettono di dedurre altre caratteristiche del diagramma della funzione.

a) Poiché nel punto $x=\sqrt{2}$ la funzione è strettamente crescente, in un intorno destro di detto punto la concavità deve essere rivolta verso il basso e poiché per x→+∞ abbiamo già precisato che il grafico della funzione è asintotico a quello della funzione $y=x^{\frac{4}{3}}$, che ha derivata seconda $y''=\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}$, che esiste per ogni x≠0 ed è positiva, quindi ha concavità rivolta verso l'alto, si deduce che anche la funzione in esame deve avere definitivamente concavità rivolta verso l'alto. Pertanto esisterà almeno un altro punto di flesso per $x>\sqrt{2}$.

b) Poiché nel punto $x=-\sqrt{2}$ la funzione è strettamente decrescente, considerazioni analoghe conducono alla conclusione che il diagramma della funzione deve ammettere almeno un altro punto di flesso per $x<-\sqrt{2}$.

7) **Concavità e flessi** – Pur prescindendo dal calcolo della derivata seconda e dallo studio del suo segno possiamo affermare quanto segue.

a) Esiste almeno un punto di flesso interno all'intervallo $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right[$ e per simmetria un altro punto di flesso interno all'intervallo $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

b) Nello sviluppo del precedente punto 6) abbiamo precisato che il diagramma della funzione deve ammettere almeno altri due punti di flesso esternamente all'intervallo $\left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[$.

Concludiamo che **il diagramma della funzione** in oggetto **ammette almeno quattro punti di flesso**.

Di seguito sono riportati il diagramma della funzione studiata e quello della funzione $y=x^{\frac{4}{3}}$ (quello di quest'ultima è in stile tratteggio). Sono evidenziati altresì due tratti delle rette tangenti al grafico della funzione nei punti in cui la stessa si annulla.

