Studio di due serie numeriche

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - 1}{4^n + 3}$ 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 4^{\frac{n}{2}}}{5^{\frac{n}{2}} + 9^{\frac{n}{3}}}$

Elaborazioni

1) La serie è a termini positivi, dunque regolare. Studiamo il limite del termine generale.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n - 1}{4^n + 3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{4^n\left(1 + \frac{3}{4^n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{4}\right)^n \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{3}{4^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Dal risultato ottenuto e dall'espressione dell'ultimo limite che figura nell'elaborazione deduciamo due informazioni:

a) è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza;

b) la serie in oggetto ha lo stesso carattere della serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ che sappiamo essere convergente, dunque anche la serie in esame è convergente.

Osservazione

Che la serie in oggetto abbia lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ si dimostra applicando il criterio del confronto asintotico (di Gauss). Infatti, lo studio del limite del rapporto dei termini generali delle due serie vale 1.

2) La serie in oggetto è a termini positivi, dunque regolare. Studiamo il limite del termine generale per $n\to+\infty$ elaborando opportunamente la sua espressione.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n + 4^{\frac{n}{2}}}{5^{\frac{n}{2}} + 9^{\frac{n}{3}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n + 2^n}{5^{\frac{n}{2}} + 3^{\frac{2n}{3}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n\left(1 + \frac{2^n}{3^n}\right)}{5^{\frac{n}{2}}\left(1 + \frac{3^{\frac{2n}{3}}}{5^{\frac{n}{2}}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^n \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{5}}\right)^n} =$$

$$+\infty \cdot 1 = +\infty$$

Si osservi che $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ e inoltre, essendo $0 < \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{5}} = 0{,}930\ldots < 1$, risulta anche

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{5}}\right)^n = 0.$$

Poiché non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, cioè il termine generale non è infinitesimo, ed essendo la serie regolare, si conclude che è divergente positivamente.