Problema di Cauchy

Equazione differenziale del primo ordine[1]

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 6xy(x) + xe^{3x^2-3x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e indicare esplicitamente l'intervallo più grande contenente x=0 in cui tale soluzione è definita.

Soluzione

1) L'equazione differenziale in oggetto è del primo ordine, lineare e a coefficienti variabili.
2) Il dominio di definizione della variabile x è tutto R.
3) Strategia risolutiva
   a. Scriviamo l'equazione differenziale nella seguente forma classica

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

   b. Costruiamo la funzione integrale $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$
   c. Applichiamo la formula che permette di determinare direttamente l'espressione analitica della soluzione del problema di Cauchy che è

$$y(x) = e^{-A(x)}\left\{y_0 + \int_{x_0}^{x} b(s)\cdot e^{A(s)}ds\right\}$$

4) Elaborazioni
   a. $y'(x) - 6x \cdot y(x) = xe^{3x^2-3x}$ Equazione nella forma (1).
   b. $a(x) = -6x \to A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt = \int_0^x -6tdt = \left[-3t^2\right]_0^x = -3x^2$.
   c. Applichiamo ora la formula indicata nel precedente punto 3-c) con $b(s) = s\cdot e^{3s^2-3s}$ per trovare direttamente la soluzione del problema di Cauchy in esame. Si ha:

$$y(x) = e^{3x^2}\left\{1 + \int_0^x s\cdot e^{3s^2-3s}\cdot e^{-3s^2}ds\right\} = e^{3x^2}\left\{1 + \int_0^x s\cdot e^{-3s}ds\right\} \qquad (*)$$

L'integrale indefinito $\int s\cdot e^{-3s}ds$ si calcola per parti e si ha

$$\int s\cdot e^{-3s}ds = \int -\frac{1}{3}s\cdot D\left(e^{-3s}\right)ds = -\frac{1}{3}s\cdot e^{-3s} - \int e^{-3s}\left(-\frac{1}{3}\right)ds = -\frac{1}{3}s\cdot e^{-3s} + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3s}\right) + c =$$

$-\left(\frac{1}{3}s + \frac{1}{9}\right)e^{-3s} + c$, con c costante arbitraria.

[1] Testo presente nella prova d'Esame Scritto del Corso di Matematica 1, A.A. 2014-2015- Parma, 20 luglio 2015, Corso di Laurea in Chimica

Tornando all'espressione (*) abbiamo

$$e^{3x^2}\left\{1+\int_0^x s\cdot e^{-3s}ds\right\}=e^{3x^2}\left\{1+\left[-\left(\frac{1}{3}s+\frac{1}{9}\right)e^{-3s}\right]_0^x\right\}=e^{3x^2}\left\{1+\left[-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right)e^{-3x}\right]+\left(0+\frac{1}{9}\right)e^{0}\right\}=$$

$$e^{3x^2}\left[\frac{10}{9}-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right)e^{-3x}\right]$$

Questa funzione rappresenta la soluzione cercata del problema di Cauchy in esame.

Facciamo notare che la funzione integrale trovata è definita su tutto l'asse reale.

Riportiamo di seguito il grafico della soluzione.