Studio di funzione

Studiare la funzione $f(x)=arctg\left(\frac{x}{1-x}\right)-x$, rappresentandone il relativo grafico.

Tracciare il grafico della funzione $g(x)=f(2x)$.

Elaborazioni

Studio della funzione $y=f(x)$

1) La funzione è definita in D=R-{1}.
2) La funzione è continua in ciascun punto del dominio.
3) Zeri, limiti nei punti di frontiera del dominio ed eventuali asintoti
   a. La funzione si annulla nel punto x=0.
   b. La frontiera del dominio è $Fr(D)=\{-\infty;1;+\infty\}$.
   c. $\lim_{x\to-\infty} arctg\left(\frac{x}{1-x}\right)-x=arctg(-1)+\infty=+\infty$;
   d. $\lim_{x\to+\infty} arctg\left(\frac{x}{1-x}\right)-x=arctg(-1)-\infty=-\infty$;
   e. $\lim_{x\to1^-} arctg\left(\frac{x}{1-x}\right)-x=arctg(+\infty)-1=\frac{\pi}{2}-1=f(1^-)$;
   f. $\lim_{x\to1^+} arctg\left(\frac{x}{1-x}\right)-x=arctg(-\infty)-1=-\frac{\pi}{2}-1=f(1^+)$.
   g. Il punto x=1 risulta esser di discontinuità di prima specie; nel punto la funzione presenta il salto $\sigma=f(1^+)-f(1^-)=-\pi$. Il diagramma della funzione per $x\to1^-$ si avvicina al punto $A\left(1;\frac{\pi}{2}-1\right)$ e per $x\to1^+$ si avvicina al punto $B\left(1;-\frac{\pi}{2}-1\right)$.
   h. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{arctg\left(\frac{x}{1-x}\right)}{x}-1=0-1=-1=m$
   i. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to\pm\infty} arctg\left(\frac{x}{1-x}\right)=arctg(-1)=-\frac{\pi}{4}$, quindi la retta $s: y=-x-\frac{\pi}{4}$ è asintoto obliquo per il diagramma della funzione per $x\to\pm\infty$.
4) Monotonia

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2}-1=\frac{1}{(1-x)^2+x^2}-1=\frac{2x(1-x)}{(1-x)^2+x^2}.$$

La funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio e la funzione derivata prima è positiva nell'intervallo aperto]0;1[, dove la funzione è strettamente crescente e negativa altrove. Il punto x=0 è di minimo relativo proprio; abbiamo già precisato che in detto punto la funzione si annulla.

Aggiungiamo che in ciascuno dei due intervalli]-∞;0[,]1;+∞[la funzione è strettamente decrescente.

Andamento del grafico per x→1

Il limiti laterali della derivata prima per x→1forniscono informazioni interessanti sull'andamento del grafico della funzione.

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2+x^2} = 0^+;$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2+x^2} = 0^-$$

Conclusione: le semitangenti sinistra e destra al diagramma della funzione nei punti $A\left(1;\frac{\pi}{2}-1\right)$ e $B\left(1;-\frac{\pi}{2}-1\right)$ sono parallele all'asse delle ascisse.

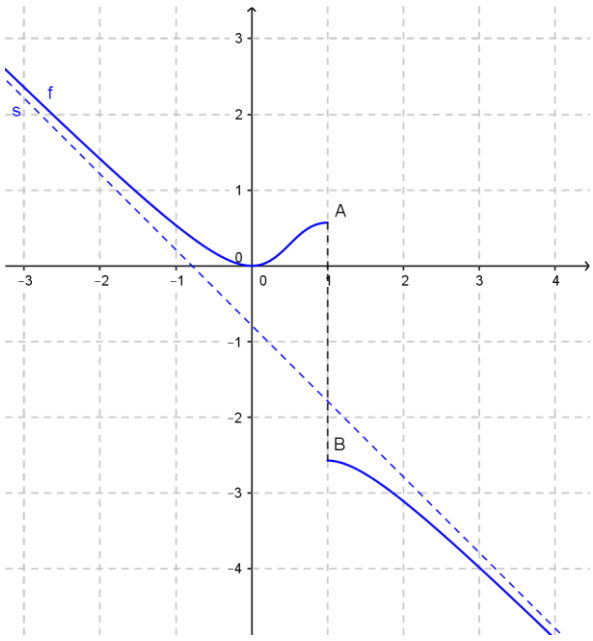


Figura 1

5) Concavità, convessità ed eventuali punti di flesso

Da quanto fin qui emerso deduciamo che vi è almeno un punto di flesso interno all'intervallo]0;1[. Determiniamo l'espressione della derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{(2-4x)\left(1-2x+2x^2\right)+2x(1-x)(2-4x)}{\left((1-x)^2+x^2\right)^2} = \frac{(2-4x)}{\left((1-x)^2+x^2\right)^2}$$

La derivata seconda si annulla nel punto $x=\frac{1}{2}$, è positiva per $x<\frac{1}{2}$ e negativa per $\left(x>\frac{1}{2}\right)\wedge(x\neq 1)$. Il punto $x=\frac{1}{2}$ è l'unico punto di flesso (ed è discendente):

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = arctg(1)-\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

La funzione è convessa nell'intervallo $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ e concava in ciascuno dei due intervalli $\left]\frac{1}{2};1\right[$, $]1;+\infty[$.

La funzione g(x)

$$g(x)=arctg\left(\frac{2x}{1-2x}\right)-2x$$

Il grafico della funzione si ottiene tramite una compressione di fattore 2 lungo l'asse delle ascisse a partire dal diagramma della funzione y=f(x).

La nuova funzione ha come dominio $R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$; in x=0 si annulla ed il punto è di minimo relativo proprio; il salto si verifica nel punto x=1/2 e vale sempre -π; infine, la nuova funzione ammette come asintoto obliquo la retta $s': y=-2x-\frac{\pi}{4}$.

In Figura 2 sono riportati i diagrammi delle due funzioni per i relativi confronti.

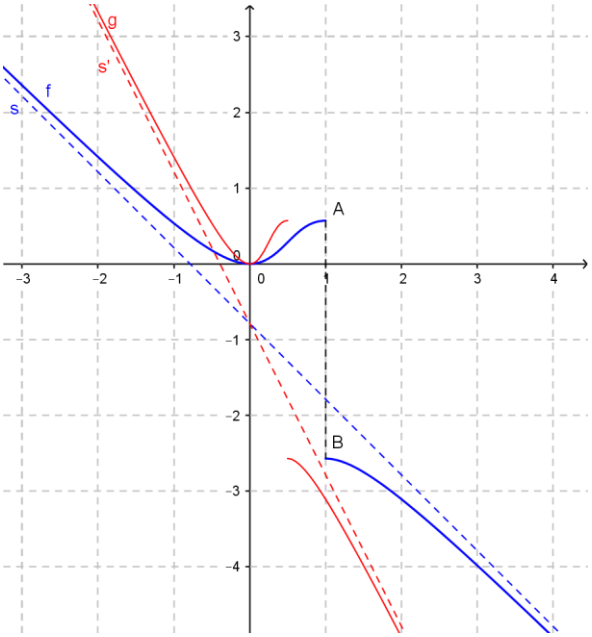


Figura 2