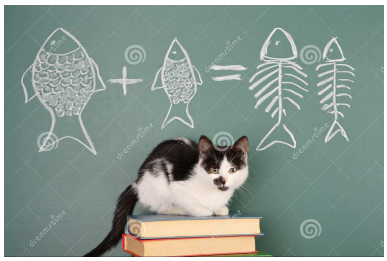
SERIE NUMERICHE

(Cosimo De Mitri)



1. Definizione, esempi e primi risultati ..... pag. 1

2. Criteri per serie a termini positivi ..... pag. 4

3. Convergenza assoluta e criteri per serie a termini di segno qualsiasi ..... pag. 6

4. Serie a termini di segno alterno ..... pag. 9

5. La proprietà communtativa nelle serie pag.11

6. Esercizi pag.12

C.d.L in Fisica

Lecce, a.a. 2014/15

LE SERIE NUMERICHE

(C. De Mitri)

1. Definizione, esempi e primi risultati

Quanto fa $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ *?* Zenone di Elea (V secolo a.C.), nei suoi famosi paradossi, non era neanche minimamente sfiorato dal dubbio che il risultato potesse essere finito.
A ben vedere, prima di domandarci quanto fa una *somma con infiniti addendi*, dobbiamo chiederci che significato attribuire ad una tale operazione. Nel caso di un numero finito di addendi, per ottenerne la somma si considera dapprima la somma dei primi due, al risultato si aggiunge il terzo, al nuovo risultato si aggiunge il quarto, e così via fino ad arrivare all'ultimo. Nel caso che gli addendi siano infiniti si otterrà una successione infinita di risultati parziali, e si renderà necessario evidententemente un passaggio al limite per mettere fine all'operazione. La nozione di serie che andiamo a definire formalizza in modo rigoroso il concetto intuitivo di "somma di infiniti termini".

Definizione 1.1. *Data la succ/ne numerica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, si dice serie ad essa associata, o serie di termine generale* a_n*, la succ/ne* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, dove,* $\forall\, n\in\mathbb{N},\ s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$*.*
La serie è indicata con $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(talvolta con* $\Sigma_n a_n$*), oppure con* $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ *; per ogni* $n\in\mathbb{N}$*, il numero* s_n *è chiamato somma parziale ennesima o ridotta di ordine* n*.*
La serie si dice convergente, divergente, indeterminata (e si parla di carattere della serie), se tale risulta essere rispett/te la succ/ne $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. In caso di convergenza, e per estensione anche in caso di divergenza, il* $\lim_{n\to\infty} s_n$ *è chiamato somma della serie ed è indicato con* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *oppure con* $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ *(gli stessi simboli con cui è indicata la serie).*

La serie geometrica. Dato $x\in\mathbb{R}$, si chiama *serie geometrica di ragione* x la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\ldots$.
Qui è possibile esprimere la somma parziale s_n in modo da poterne facilmente calcolare il limite: se $x=1$ si ha che $s_n=1+1+\ldots+1=n$; se $x\neq 1$ è noto che $s_n=1+x+\ldots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$.
Si conclude allora che $\lim_{n\to\infty} s_n \begin{cases} =+\infty & \text{se } x\geq 1 \\ =\frac{1}{1-x} & \text{se } |x|<1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x\leq -1 \end{cases}$.
Tornando al quesito posto all'inizio del paragrafo, si può ora rispondere che
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n=\frac{1}{1-1/2}=2$.

Proposizione 1.1 (proprietà di linearità).

a) $\left(\begin{array}{l} c\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ è regolare} \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n \text{ è regolare} \\ \sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ è regolare},\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ è regolare} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \neq \infty-\infty \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) \text{ è regolare} \\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \end{array}\right)$

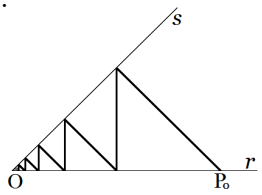
Dim. Basta considerare le somme parziali delle serie in oggetto, tener conto della linearità delle somme finite e far tendere n all'infinito applicando i teoremi sulle operazioni con i limiti ∎

Esercizi.

1) Scrivere il numero $0,2\overline{36}$ in forma frazionaria.

Risulta $0,2\overline{36} = 0,2363636\ldots = \frac{2}{10} + \frac{36}{10^3} + \frac{36}{10^5} + \frac{36}{10^7} + \ldots = \frac{2}{10} + \frac{36}{10^3}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots\right) = \frac{2}{10} + \frac{36}{10^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{100^n} = \frac{2}{10} + \frac{36}{10^3}\frac{100}{99} = \frac{2}{10} + \frac{36}{990} = \frac{2(100-1)+36}{990} = \frac{236-2}{990} = \frac{13}{55}$.

2) Sia α l'angolo acuto formato dalle semirette r ed s uscenti da O. Si prenda su r il punto P_0 tale che $\overline{OP_0} = 1$. Siano P_1 la proiezione di P_0 su s, P_2 la proiezione di P_1 su r, P_3 la proiezione di P_2 su s, e così via. Calcolare la lunghezza della spezzata $P_0P_1P_2P_3\ldots$.



Si tratta di calcolare la somma $\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P_nP_{n+1}} = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \ldots$.

Si riconosce che $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \ \overline{P_nP_{n+1}} = \overline{P_{n-1}P_n}\cos\alpha$, e iterando questa uguaglianza si ricava che $\overline{P_nP_{n+1}} = \overline{P_0P_1}\cos^n\alpha = \operatorname{sen}\alpha\cos^n\alpha$.

Risulta allora $\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P_nP_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sen}\alpha\cos^n\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$.

La serie di Mengoli e le serie telescopiche. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ è nota come *serie di Mengoli*. Si riconosce che, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$, e da qui, passando al limite, si ricava che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$.

In generale, sono chiamate *serie telescopiche* quelle serie che possono essere scritte nella forma $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$. Considerato che, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$, possiamo affermare che: *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ *è regolare se e solo se* $\exists \lim_{n\to\infty} b_n$, *e in tal caso risulta* $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$.

Osservazione 1.1 (sul numero di Nepero). Dallo sviluppo di Mac–Laurin di e^x si ricava, per $x = 1$, che $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\, c\in]0,1[$ tale che $e = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!} + \frac{e^c}{n!}$. Ne segue che $0 < e - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!} = \frac{e^c}{n!} < \frac{3}{n!}$ $\quad(*)$, e dunque $e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$, vale a dire $e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$.

Basta osservare attentamente la $(*)$ per avere una idea della velocità con la quale la succ/ne $s_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$ approssima il numero e. Invero, posto $E_n = e - s_n$, da $(*)$ si ha ad esempio che $E_{10} < \frac{3}{10!}$, cosicché s_{10} approssima e con un errore inferiore al milionesimo. Si calcola $s_{10} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{9!} = 2,7182815\ldots$ (mentre $e = 2,7182818\ldots$).

Si sa che anche la succ/ne $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad e, ma essa è talmente lenta che per $n = 10$ non si raggiunge la precisione neanche nella prima cifra decimale, risultando $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2,59\ldots$; per avere il 7 come prima cifra decimale bisogna attendere il 74^o termine!

La $(*)$ consente anche di dimostrare che $e\notin\mathbb{Q}$. Se per assurdo fosse $e = \frac{p}{q}$ con $p, q\in\mathbb{N}$, preso $n > \max\{2, q\}$ si avrebbe $0 < \frac{p}{q}(n-1)! - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right)(n-1)! < \frac{3}{n} \le 1$, e ciò è impossibile dato che fra 0 e 1 non vi sono numeri interi.

Proposizione 1.2 (condizione di convergenza di Cauchy).

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}\right) \iff \left(\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}^+\,\exists\,\nu\in\mathbb{N}\,\forall\, n > \nu\ \forall\, p\in\mathbb{N}\ \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| < \varepsilon\right)$$

Dim. Applicando la nota condizione di convergenza di Cauchy alla succ/ne $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si ha che $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e solo se $\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}^+\ \exists\,\nu\in\mathbb{N}$ t.c. $\forall\, m, n > \nu\ \ |s_m - s_n| < \varepsilon$, ossia, equivalentemente, $\forall\, n > \nu\ \forall\, p\in\mathbb{N}\ \ |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ ∎

La serie resto. Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e dato $p \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3} + \dots$ è detta *serie resto di indice p* relativa alla serie data. In sostanza la serie resto di indice p è ottenuta dalla serie di partenza sopprimendone i primi p termini.

Proposizione 1.3 (teorema del resto). *Per ogni $p \in \mathbb{N}$ la serie resto $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e, in caso di regolarità, risulta $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{p} a_n$.*

Dim. Indicando con s_n la somma parziale ennesima della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e con $\sigma_n^{(p)}$ quella della serie resto, si vede che $\sigma_n^{(p)} = a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_{p+n} = \sum_{k=p+1}^{p+n} a_k = s_{p+n} - s_p$, da cui segue che $\exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(p)}$ se e solo se $\exists \lim_{n\to\infty} s_n$ e, in caso affermativo, risulta $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(p)} = \lim_{n\to\infty} s_n - s_p$ ∎

La somma della serie resto di indice p, quando esiste, è chiamata *resto p–esimo* della serie data; l'uguaglianza appena dimostrata stabilisce in sostanza che il resto p–esimo coincide con l'errore che si commette approssimando la "somma totale" con la somma parziale d'ordine p.

Conseguenza del teorema è che *il carattere di una serie non cambia se se ne modifica un numero finito di termini*, cioè se si passa dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nella quale $a_n = b_n \ \forall\, n \geq p{+}1$; infatti le due serie hanno in comune la serie resto d'indice p.

Si può provare altresì, e del resto lo si intuisce facilmente, che *di una serie non cambia il carattere, e neanche la somma, se se ne sopprime un numero, anche infinito, di termini nulli.*

I criteri atti a stabilire il carattere di una serie saranno formulati, per maggiore semplicità, richiedendo condizioni su tutti i termini a_n, ma con l'intesa che gli stessi criteri, grazie al teorema del resto, potranno essere applicati anche in quei casi in cui le stesse condizioni sono soddisfatte soltanto definit/te [1].

Proposizione 1.4 (regolarità delle serie a termini di segno costante). *Ogni serie a termini di segno costante è regolare. Se $a_n \geq 0$ $\langle \leq 0 \rangle$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$ $\langle = \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n \rangle$.*

Dim. L'ipotesi assicura che la succ/ne $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona e quindi regolare. Se $a_n \geq 0$ $\langle \leq 0 \rangle$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, allora $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente $\langle$decrescente$\rangle$ e risulta $\lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$ $\langle = \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n \rangle$ ∎

Proposizione 1.5 (condizione necessaria di convergenza).
$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \right) \implies \left(\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right)$

Dim. Posto $S = \lim_{n\to\infty} s_n$, essendo $\forall\, n \geq 2$ $a_n = s_n - s_{n-1}$ si ha che $\lim_{n\to\infty} a_n = S - S = 0$ ∎

Esercizi.

1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ diverge (posit/te). Infatti essa è regolare perché a termini positivi, ed è escluso che sia convergente per mancanza della cond. nec. (il $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste ma non è 0).

2) Stesso discorso vale per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^2 n$ (solo che qui il $\lim_{n\to\infty} a_n$ non esiste neanche).

Il fatto che $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ è condizione *necessaria ma non sufficiente* per la convergenza della serie, come mostra l'esempio che segue.

---

[1] Ricordiamo che, se $\forall\, n \in \mathbf{N}$ P_n è un predicato nella variabile n, si pone
$P_n \ definitivamente \iff \exists\, k \in \mathbf{N} \ \forall\, n > k \ \ P_n$.

La serie armonica. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, detta *serie armonica*, è divergente.
Per provarlo, osserviamo che $\forall\, n \in \mathbb{N}\ s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$, dato che ognuna delle n frazioni è non minore dell'ultima. Se si suppone per assurdo che $\lim_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$, allora deve risultare $\lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_n) = S - S = 0$, e dunque $s_{2n} - s_n < \frac{1}{2}$ definit/te.

2. Criteri per serie a termini positivi

I criteri che seguono riguardano serie a termini positivi, ma è chiaro che *risultati analoghi a quelli che esporremo valgono per serie a termini negativi e, più in generale, per serie a termini di segno definit/te costante.* Più avanti vedremo come i criteri sulle serie a termini positivi potranno essere utilizzati anche per serie a termini di segno variabile.
Ricordiamo che tutte le serie a termini positivi sono regolari.

Proposizione 2.1 (criterio di Cauchy o di condensazione). *Se la succ/ne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è a termini positivi e decrescente, allora le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere.*

Dim. Indicate con s_n e σ_n le somme parziali ennesime delle due serie in oggetto, e precisamente $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ e $\sigma_n = a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \ldots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}}$, si vede che:
$a_1 \leq a_1 = 2^0 a_{2^0}$,
$a_2 + a_3 \leq 2a_2 = 2^1 a_{2^1}$,
$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 4a_4 = 2^2 a_{2^2}$,
. . . . . ,
$a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n-1} \leq 2^{n-1} a_{2^{n-1}}$,
da cui segue, sommando membro a membro, che $s_{2^n-1} \leq \sigma_n$;
analogamente si ha:
$a_1 \geq 2^{-1} a_{2^0}$,
$a_2 \geq 2^0 a_{2^1}$,
$a_3 + a_4 \geq 2a_4 = 2^1 a_{2^2}$,
$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq 4a_8 = 2^2 a_{2^3}$,
. . . . . ,
$a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \ldots + a_{2^n} \geq 2^{n-1} a_{2^n}$,
da cui segue, sommando membro a membro, che $s_{2^n} \geq \frac{1}{2}\sigma_n$.
Dalla 1ª relazione trovata discende che, se $\lim_{n\to\infty} \sigma_n \in \mathbb{R}$, anche $\lim_{n\to\infty} s_n\, (= \lim_{n\to\infty} s_{2^n-1}) \in \mathbb{R}$; dalla 2ª relazione trovata discende che, se $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$, anche $\lim_{n\to\infty} s_n\, (= \lim_{n\to\infty} s_{2^n}) = +\infty$ ∎

La serie armonica generalizzata. Dato $\alpha \in \mathbb{R}^+$, si chiama *serie armonica generalizzata di ordine* α la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. E' facile riconoscere che vi sono le condizioni per applicare il criterio di condens/ne; si passa così alla serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{\alpha n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$, la quale converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$. In seguito, con abuso di linguaggio, useremo la stessa denominazione anche per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha \leq 0$; in questo caso è evidente che la serie diverge, perché manca la nota cond. nec. di convergenza.

I risultati sulla serie armonica generalizzata, il cui termine generale è l'inf/mo campione di ordine α, fanno sorgere un sospetto: *se la succ/ne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a 0 in modo "sufficientemente" veloce, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.* Sarà così? Vedremo più avanti.

Esercizio. La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ ha il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log 2}$, che diverge. Più in generale, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^x}$ ha il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \log 2)^x}$, e questa converge se e solo se $x > 1$.

Proposizione 2.2 (criterio del confronto). *Siano $\Sigma_n a_n$ e $\Sigma_n b_n$ due serie a termini positivi. Se $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $a_n \le b_n$, allora la convergenza di $\Sigma_n b_n$ implica la convergenza di $\Sigma_n a_n$ (ossia, in forma contronominale, la divergenza di $\Sigma_n a_n$ implica la divergenza di $\Sigma_n b_n$).*

N.B. Se $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $a_n \le b_n$, si suol dire che la serie $\Sigma_n a_n$ è *maggiorata* dalla serie $\Sigma_n b_n$, oppure che la serie $\Sigma_n b_n$ è *minorata* dalla serie $\Sigma_n a_n$.

Dim. Indicate con s_n e σ_n le ridotte rispett/te di $\Sigma_n a_n$ e $\Sigma_n b_n$, dall'ipotesi segue che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $0 < s_n \le \sigma_n$, e dunque, se $\lim_n \sigma_n \in \mathbb{R}$, allora anche $\lim_n s_n \in \mathbb{R}$ ∎

Esercizi.

1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+\operatorname{sen} n)}{n\sqrt{n}}$ converge, dato che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $0 < \frac{\log(2+\operatorname{sen} n)}{n\sqrt{n}} \le \frac{\log 3}{n\sqrt{n}}$.

2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \operatorname{sen}^2 n}$ diverge, dato che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n \operatorname{sen}^2 n} \ge \frac{1}{n}$.

3) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ converge. Infatti, poiché $\lim_{n\to\infty} \log\log n = +\infty$, si ha che $\log\log n \ge 2$ definit/te, e dunque risulta $0 < \frac{1}{(\log n)^{\log n}} = \frac{1}{n^{\log\log n}} \le \frac{1}{n^2}$ definit/te.

Proposizione 2.3 (criterio del confronto asintotico). *Siano $\Sigma_n a_n$ e $\Sigma_n b_n$ due serie a termini positivi. Se $a_n \simeq b_n$ per $n \to \infty$, allora le due serie hanno lo stesso carattere.*

Dim. Poiché $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$, risulta $\frac{1}{2} \le \frac{a_n}{b_n} \le \frac{3}{2}$ definit/te, e dunque $\frac{1}{2} b_n \le a_n \le \frac{3}{2} b_n$ definit/te. Dopo di ciò basta invocare il criterio del confronto ∎

Esercizi.

1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n - n^{10}}$ converge, dato che $\frac{1}{5^n - n^{10}} \simeq \frac{1}{5^n}$ per $n \to \infty$. Si osservi che i termini della serie data non sono tutti positivi (ma è chiaro che lo sono definit/te).

2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$ diverge, dato che $\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{1}{n}\log n} - 1 \simeq \frac{\log n}{n}$ per $n \to \infty$ e $\frac{\log n}{n} \ge \frac{1}{n}$ definit/te. Qui sono intervenuti sia il criterio del confronto sia il criterio del confronto asintotico.

Osservazione 2.1. *Nella Prop/ne 2.3 l'ipotesi che i termini della serie siano positivi (o, più precisamente, di segno definit/te costante), è indispensabile.*
Ad esempio la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ è convergente (come vedremo più avanti) e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$ è divergente (vedi Prop/ne 1.1), nonostante che le succ/ni siano tra loro asintotiche.

Proposizione 2.4 (criterio della radice). *Sia $\Sigma_n a_n$ una serie a termini positivi.*
a) *Se $\exists\, k \in]0,1[$ t.c. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{a_n} \le k$, allora $\Sigma_n a_n$ converge.*
b) *Se $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ freq/te [1], allora $\Sigma_n a_n$ non converge (per mancanza della nota cond. nec.).*

Dim.(a). L'ipotesi è che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $a_n \le k^n$, e la tesi segue in virtù del criterio del confronto.
(b). Dall'ipotesi si ricava che $a_n \ge 1$ freq/te, e ciò impedisce che $(a_n)_n$ sia inf/ma ∎

[1] Ricordiamo che, se $\forall\, n \in \mathbb{N}$ P_n è un predicato nella variabile n, si pone:
P_n *frequentemente* $\overset{def.}{\iff}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $\exists\, n > k$ P_n.
Si riconosce facilmente che: P_n *freq/te* $\iff$ $\neg(\neg P_n$ *definit/te*$)$.

Proposizione 2.5 (criterio del rapporto). *Sia* $\Sigma_n a_n$ *una serie a termini positivi.*
a) *Se* $\exists\, k\in]0,1[$ *t.c.* $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\le k$, *allora* $\Sigma_n a_n$ *converge.*
b) *Se* $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1$, *allora* $\Sigma_n a_n$ *non converge (per mancanza della nota cond. nec.).*

Dim.(a). Dall'ipotesi segue che $a_2\le ka_1,\ a_3\le ka_2\le k^2a_1$, e così si ottiene in generale che $\forall\, n\in\mathbb{N}\ a_n\le k^{n-1}a_1$. Dato che la serie $\Sigma_n a_1k^{n-1}$ converge, anche la serie $\Sigma_n a_n$ converge.
(b). Dall'ipotesi segue che la succ/ne $(a_n)_n$ è crescente, e dunque $\forall\, n\in\mathbb{N}\ a_n\ge a_1>0$. Ciò impedisce che $(a_n)_n$ sia inf/ma ∎

Osservazione 2.2. *Nella (b) di Prop/ne 2.5 non sarebbe sufficiente l'ipotesi* $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1$ *freq/te.* Ciò è provato ad esempio dalla serie $1+1+\frac12+\frac12+\frac14+\frac14+\frac18+\frac18+\dots$; in effetti questa serie converge, dato che la sua ridotta di ordine $2n$ è $s_{2n}=2\sigma_n$, dove σ_n è la ridotta d'ordine n della serie geometrica di ragione $\frac12$, cosicché $\lim_n s_{2n}=2\lim_n\sigma_n=4$.

3. Convergenza assoluta e criteri per serie a termini di segno qualsiasi

Definizione 3.1. *Si dice che la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge assolutamente se converge la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

E' evidente che, nel caso di serie a termini di segno costante, non c'è differenza fra convergenza e convergenza assoluta. Comunque, nel caso generale, sussiste la seguente

Proposizione 3.1. $\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge assol/te* $\Big)\implies\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge e* $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n|\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\Big)$
N.B. L'ultima parte della tesi mostra che la disuguaglianza triangolore del valore assoluto si estende al caso delle somme con infiniti addendi.

Dim. Per dimostrare la prima parte della tesi possiamo utilizzare la condizione di convergenza di Cauchy: fissato $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, dato che $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge, $\exists\,\nu\in\mathbb{N}\ \forall\, n>\nu\ \forall\, p\in\mathbb{N}\ \sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|<\varepsilon$; ne segue, tenendo conto della disuguaglianza triangolare, che $\forall\, n>\nu\ \forall\, p\in\mathbb{N}\ |\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k|<\varepsilon$.
Oppure la dimostrazione si può fare utilizzando le serie a termini non negativi $\Sigma_n a_n^+$ e $\Sigma_n a_n^-$ associate alla serie $\Sigma_n a_n$[1]: se la serie $\Sigma_n a_n$ è assol/te convergente, allora le serie $\Sigma_n a_n^+$ e $\Sigma_n a_n^-$ sono convergenti, essendo $\forall\, n\in\mathbb{N}\ a_n^+, a_n^-\le|a_n|$; da ciò segue, per la proprietà di linearità, che converge anche la serie $\Sigma_n a_n$, essendo $a_n=a_n^+-a_n^-$.
Per la seconda parte della tesi, posto $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ e $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$, basta osservare che, per la disuguaglianza triangolare, $|s_n|\le\sigma_n$, e poi passare al limite per $n\to\infty$ ∎

Si è visto nel corso della dimostrazione che, *se la serie* $\Sigma_n a_n$ *è assol/te convergente, allora le serie* $\Sigma_n a_n^+$ *e* $\Sigma_n a_n^-$ *sono convergenti.* Aggiungiamo che, viceversa, *se le serie* $\Sigma_n a_n^+$ *e* $\Sigma_n a_n^-$ *sono convergenti, allora la serie* $\Sigma_n a_n$ *è assol/te convergente*, dato che $\forall\, n\in\mathbb{N}\ a_n=a_n^+-a_n^-$.

---

[1] Ricordiamo che, dato $x\in\mathbb{R}$, si pone $x^+=\max\{x,0\}=\begin{cases}0 & \text{se } x<0\\ x & \text{se } x\ge 0\end{cases}$ e $x^-=\max\{-x,0\}=\begin{cases}-x & \text{se } x\le 0\\ 0 & \text{se } x>0\end{cases}$, e risulta $x=x^+-x^-$, $|x|=x^++x^-$ e $0\le x^+,x^-\le|x|$.

Esercizio. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{e^{nx^2}}$ converge $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Infatti: se $x = 0$ la serie è a termini nulli; se $x \neq 0$ la serie converge assol/te, dal momento che $|a_n(x)| = \frac{|\text{sen}(nx)|}{e^{nx^2}} \leq \frac{1}{e^{nx^2}} = (e^{-x^2})^n$ e che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x^2})^n$ converge.

Osservazione 3.1. *Nella prop/ne precedente non vale l'implicazione inversa.*
Ad esempio la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ è convergente (lo vedremo più avanti), senza essere assol/te convergente.

Le serie che sono convergenti senza essere assol/te convergenti si dicono *semplicemente convergenti*. Si riconosce facilmente, ragionando per assurdo, che, *se la serie* $\Sigma_n a_n$ *è sempl/te convergente, allora le serie* $\Sigma_n a_n^+$ *e* $\Sigma_n a_n^-$ *sono entrambe divergenti.*

Dai criteri della radice e del rapporto discendono i seguenti criteri per serie a termini di segno qualsiasi, che enunciamo nella forma più idonea per le applicazioni.

Proposizione 3.2 (criterio della radice per la convergenza assoluta). *Sia data la serie* $\Sigma_n a_n$.
a) Se $\exists \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *allora* $\Sigma_n a_n$ *converge assol/te.*
b) Se $\exists \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *allora* $\Sigma_n a_n$ *non converge (per mancanza della nota cond. nec.).*

Dim.(a). Sia $l = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Preso $k = \frac{l+1}{2}$, risulta $\sqrt[n]{|a_n|} < k$ definit/te, ossia $|a_n| < k^n$ definit/te, da cui segue, per il criterio del confronto, che la serie $\Sigma_n |a_n|$ converge.
(b). Dall'ipotesi segue che $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ definit/te, ossia $|a_n| > 1$ definit/te, e ciò impedisce che la succ/ne $(a_n)_n$ sia inf/ma ∎

Proposizione 3.3 (criterio del rapporto per la convergenza assoluta). *Sia data la serie* $\Sigma_n a_n$, *con* $a_n \neq 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
a) *Se* $\exists \lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$, *allora* $\Sigma_n a_n$ *converge assol/te.*
b) *Se* $\exists \lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$, *allora* $\Sigma_n a_n$ *non converge (per mancanza della nota cond. nec.).*

Dim. Basta ricordare che, se $\exists \lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = l$, allora $\exists \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = l$, e poi invocare il criterio precedente ∎

All'inizio della dim/ne è stato ricordato che, se $\exists \lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = l$, allora $\exists \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = l$; a causa di ciò si può affermare che *il criterio della radice è più forte del criterio del rapporto*, dato che ciascuna delle ipotesi del primo è più debole della corrispondente ipotesi del secondo.

Osservazione 3.2. E' noto che, data la succ/ne $(x_n)_n$, sono definiti il suo *minimo limite*, $\min\lim_{n\to\infty} x_n$ o brevemente $\lim'_n x_n$, ed il suo *massimo limite*, $\max\lim_{n\to\infty} x_n$ o brevemente $\lim''_n x_n$:

$$\lim'_n x_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = -\infty \\ \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} x_n & \text{se } \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n > -\infty \end{cases}, \quad \lim''_n x_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty \\ \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} x_n & \text{se } \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n < +\infty \end{cases}$$

per i quali valgono le seguenti proprietà:
1) $\lim'_n x_n \leq \lim''_n x_n$;
2) *dato* $l \in \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \lim_n x_n = l \ \Leftrightarrow\ \lim'_n x_n = \lim''_n x_n = l$;
3) *dato* $l \in \mathbb{R}$, $\lim'_n x_n = l \ \Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ l - \varepsilon < x_n$ *definit/te e* $x_n < l + \varepsilon$ *freq/te*,
$\lim''_n x_n = l \ \Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ l - \varepsilon < x_n$ *freq/te e* $x_n < l + \varepsilon$ *definit/te*.

Ciò premesso, si riconosce facilmente che *le ipotesi in (a) delle Prop/ni 3.2 e 3.3 possono essere sostituite rispett/te dalle condizioni più deboli che* $\max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ *e* $\max\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$; analogamente *le ipotesi in (b) possono essere sostituite rispett/te dalle condizioni più deboli che* $\max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ *e* $\min\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$.

Esercizi.

1) Per la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ (già incontrata in precedenza) il criterio della radice è inefficace, dato che risulta $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$. Il problema si risolve se si effettua preliminarmente una condensazione, passando alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(n \log 2)^{n \log 2}}$. Infatti, posto $b_n = 2^n \frac{1}{(n \log 2)^{n \log 2}}$, si ha che $\lim_n \sqrt[n]{b_n} = 0 < 1$. Pertanto la serie data converge.

2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} (\frac{x}{3-2x})^n$ è definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$.
Si calcola $\lim_n \sqrt[n]{|a_n(x)|} = |\frac{x}{3-2x}|$. Risulta:
$|\frac{x}{3-2x}| < 1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3$, e per tali x la serie converge assol/te;
$|\frac{x}{3-2x}| > 1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 1 < x < 3$, e per tali x la serie non converge (si può aggiungere, se $x < \frac{3}{2}$, che la serie, essendo a termini positivi, diverge).
Infine $|\frac{x}{3-2x}| = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$: per $x = 1$ la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che non converge; per $x = 3$ la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$, che converge assol/te.

3) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \operatorname{sen}(2n)}{(2n)^n n!}$ converge assol/te.
Infatti $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \leq \frac{(2n)!}{(2n)^n n!}$, e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n n!}$ converge per il criterio del rapporto, in quanto, posto $b_n = \frac{(2n)!}{(2n)^n n!}$, si ha che $\lim_n \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_n \frac{2n+1}{n+1} (\frac{n}{n+1})^n = \frac{2}{e} < 1$.

4) Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$ $(x \in \mathbb{R})$.
Per $x = 0$ la serie converge.
Per $x \neq 0$ si vede che $\lim_n |\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}| = \lim_n \frac{|x|}{(1+1/n)^n} = \frac{|x|}{e}$, cosicché: se $|x| < e$ la serie converge assol/te; se $|x| > e$ la serie non converge (diverge perché a termini positivi se $x > e$).
Per $x = e$ e per $x = -e$ si ottengono rispett/te le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n n!}{n^n}$, per le quali il criterio del rapporto in forma asintotica non può essere applicato; tuttavia in entrambi i casi, risultando $|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}| = \frac{e}{(1+1/n)^n} > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, è applicabile alla corrispondente serie dei valori assoluti la Prop/ne 2.5, che esclude il verificarsi della cond. nec. di convergenza.

5) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$ converge. Ad essa si può applicare il criterio della radice ma non quello del rapporto. Risulta infatti $\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{2}}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{1}{2\sqrt[n]{2}} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 2 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$,
per cui $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \neq 1$, mentre $\max \lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 2 > 1$ e $\min \lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{8} < 1$.

Il criterio che segue, basato sul confronto con la serie armonica generalizzata, conferma l'intuizione che il comportamento di questa serie aveva a suo tempo generato, e ne precisa le condizioni.

Proposizione 3.4 (criterio dell'ordine di inf/mo). *Sia data la serie* $\Sigma_n a_n$.

a) *Se* $\exists\, \alpha > 1$ *t.c.* $(a_n)_n$ *sia inf/ma d'ordine maggiore di* α *o uguale ad* α, *allora* $\Sigma_n a_n$ *è assol/te convergente.*

b) *Se* $(a_n)_n$ *è inf/ma d'ordine minore di 1 o uguale ad 1, allora* $\Sigma_n a_n$ *non è assol/te convergente.*

Dim.(a). Supponiamo che $(a_n)_n$ sia inf/ma d'ordine maggiore di $\alpha > 1$. Dal fatto che $\lim_n \frac{|a_n|}{1/n^\alpha} = 0$ segue che $\frac{|a_n|}{1/n^\alpha} < 1$ definit/te, ossia che $|a_n| < \frac{1}{n^\alpha}$ definit/te, cosicché $\Sigma_n |a_n|$ converge. Se poi $(a_n)_n$ è inf/ma d'ordine α, si prende $\beta \in]1, \alpha[$ e si ricade nel caso precedente.

(b). Se $(a_n)_n$ è inf/ma d'ordine minore di 1, vuol dire che $\lim_n \frac{|a_n|}{1/n} = +\infty$, da cui segue che $\frac{|a_n|}{1/n} > 1$ definit/te, ossia che $|a_n| > \frac{1}{n}$ definit/te, cosicché $\Sigma_n|a_n|$ diverge. Se poi $(a_n)_n$ è inf/ma d'ordine 1, allora $\exists\, h \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\frac{|a_n|}{1/n} \geq h$ definit/te, da cui segue che $|a_n| \geq h\frac{1}{n}$ definit/te, e di nuovo $\Sigma_n|a_n|$ diverge ∎

Osservazione 3.3. Si riconosce subito che:
a) *l'ipotesi in (a) equivale alla seguente:* $\exists\, \alpha > 1$ *t.c.* $\lim_n n^\alpha |a_n| < +\infty$;
b) *l'ipotesi in (b) è in particolare soddisfatta se* $(a_n)_n$ *è inf/ma e* $\lim_n n|a_n| > 0$.

Esercizi.

1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\log n}{n^2}$ converge assol/te, dato che $(a_n)_n$ è inf/ma d'ordine maggiore di $\frac{3}{2}$.

2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ diverge, dato che $(a_n)_n$ è inf/ma d'ordine minore di 1.

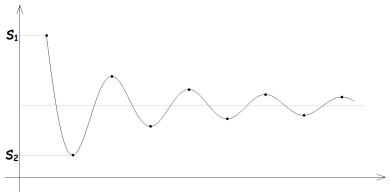
3) Si è visto, usando il criterio di condensazione, che la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverge. A questa serie non può essere applicato il criterio dell'ordine di inf/mo, dato che la succ/ne $(a_n)_n$ non soddisfa né l'ipotesi in (a) né l'ipotesi in (b). Da notare anche che la serie non converge, nonostante che la succ/ne $(a_n)_n$ sia inf/ma d'ordine maggiore di 1.

4) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ converge, dato che la succ/ne $(a_n)_n$ è inf/ma d'ordine infinitamente grande.

5) Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^\alpha} - \operatorname{tg}\frac{1}{n^2})$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $a_n(\alpha) = \frac{1}{n^\alpha} - \operatorname{tg}\frac{1}{n^2}$, si ha che:
se $\alpha < 2$ è $a_n(\alpha) \simeq \frac{1}{n^\alpha}$ per $n \to \infty$, cosicché la serie diverge per $\alpha \leq 1$ e converge per $\alpha > 1$;
se $\alpha = 2$ è $a_n = o(\frac{1}{n^2})$ per $n \to \infty$, e la serie converge;
se $\alpha > 2$ è $a_n(\alpha) \simeq -\frac{1}{n^2}$ per $n \to \infty$, e la serie converge.

4. Serie a termini di segno alterno

Proposizione 4.1 (criterio di Leibniz). *Sia data la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$, *con* $b_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Se $(b_n)_n$ *è decrescente e inf/ma, allora la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$ *è convergente.*
Nelle stesse ipotesi, se s_n *ed* S *sono rispett/te la somma parziale ennesima e la somma della serie, allora* $\forall\, n \in \mathbb{N}\ |S - s_n| \leq b_{n+1}$.



Dim. La succ/ne $(s_{2n-1})_n$ è decrescente, dato che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $s_{2n+1} - s_{2n-1} = b_{2n+1} - b_{2n} \leq 0$; la succ/ne $(s_{2n})_n$ è crescente, dato che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $s_{2n+2} - s_{2n} = -b_{2n+2} + b_{2n+1} \geq 0$. Inoltre queste due succ/ni sono limitate, dato che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $s_2 \leq s_{2n} = s_{2n-1} - b_{2n} < s_{2n-1} \leq s_1$.
Ne segue che $\exists \lim_n s_{2n-1} = \inf_n s_{2n-1} = S' \in \mathbb{R}$ ed $\exists \lim_n s_{2n} = \sup_n s_{2n} = S'' \in \mathbb{R}$.
Risulta poi $S' - S'' = \lim_n(s_{2n-1} - s_{2n}) = \lim_n b_{2n} = 0$, e dunque $S' = S''$. Posto $S = S' = S''$, si conclude che $\exists \lim_n s_n = S \in \mathbb{R}$.
Proviamo che $\forall\, n \in \mathbb{N}\ |S - s_n| \leq b_{n+1}$. Se $n = 2m-1$, la disuguaglianza diventa $s_{2m-1} - S \leq b_{2m}$, ossia $s_{2m} \leq S$, che è vera; se $n = 2m$, la disuguaglianza diventa $S - s_{2m} \leq b_{2m+1}$, ossia $S \leq s_{2m+1}$, che è vera ∎

Proposizione 4.2. *Sia data la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,b_n$, *con* $b_n > 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Se $(b_n)_n$ *è crescente, allora la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,b_n$ *è indeterminata.*

Dim. Si riconosce che le succ/ni $(s_{2n-1})_n$ e $(s_{2n})_n$ sono la prima crescente e la seconda decrescente. Inoltre risulta $s_2 = b_1 - b_2 < s_1$. Pertanto $\lim_n s_{2n-1} = \sup_n s_{2n-1} \geq s_1 > s_2 \geq \inf_n s_{2n} = \lim_n s_{2n}$, cosicché la succ/ne $(s_n)_n$ non può essere regolare ∎

La serie armonica alternata. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, detta *serie armonica alternata*, converge in virtù del criterio di Leibniz. Detta S la sua somma, risulta $|S - s_{100}| \leq \frac{1}{101}$, cosicché $s_{100} = 0,688\ldots$ costituisce una approssimazione (per difetto) di S a meno di un centesimo.

Possiamo dimostrare che $S = \log 2 = 0,693\ldots$. Infatti dallo sviluppo di Mac–Laurin di $\log(1+x)$ si ricava, per $x = 1$, che $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, c \in]0,1[$ t.c. $\log 2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$; ne segue che $|\log 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}| = \frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}} < \frac{1}{n+1}$ e dunque $\lim_n \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$.

Esercizi.

1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\log n}{n}$, che non è assol/te convergente, converge in virtù del criterio di Leibniz. Quanto alla decrescenza di $b_n = \frac{\log n}{n}$, si vede che $b_{n+1} \leq b_n \Leftrightarrow n\log(n+1) \leq (n+1)\log n \Leftrightarrow (n+1)^n \leq n^{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 1$, e questa relazione è vera almeno definit/te, dato che $\lim_n \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 0$. Del resto, calcolando il segno della derivata, facilmente si riconosce che la funzione $f(x) = \frac{\log x}{x}$, $x \geq 1$, è decrescente in un intorno di $+\infty$.
2) La serie $\sum_{n=2}^{\infty}\log(1 + \frac{(-1)^n}{n})$ non è assol/te convergente, dato che $b_n = |\log(1 + \frac{(-1)^n}{n})| \simeq \frac{1}{n}$ per $n \to \infty$. Tuttavia essa converge in virtù del criterio di Leibniz (per provare la decrescenza di $(b_n)_n$, bisogna valutare la relazione $b_n \geq b_{n+1}$ distinguendo i casi n pari ed n dispari).
La stessa serie può essere studiata più agevolmente facendo ricorso allo sviluppo di Taylor $\log(1 + \frac{(-1)^n}{n}) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ per $n \to \infty$ e poi tenendo conto della proprietà di additività di Prop/ne 1.1. applicata alle serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=2}^{\infty}o(\frac{1}{n^2})$.
Oppure si lavora direttamente sulle sommme parziali, osservando che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $s_n = \log\frac{3}{2} + \log\frac{2}{3} + \log\frac{5}{4} + \log\frac{4}{5} + \ldots + \log(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}) = \begin{cases} \log(1+\frac{1}{n+1}) & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$ e deducendone che $\exists \lim_n s_n = 0$.

Osservazione 4.1. *Nel criterio di Leibniz non è possibile rinunciare all'ipotesi che la succ/ne* $(b_n)_n$ *sia decrescente.* Lo dimostra ad esempio la serie, divergente, $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n})$, dove appunto la succ/ne $b_n = |\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}| = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ non è decrescente. Da notare anche che la succ/ne $(\frac{1}{\sqrt{n}})_n$ decresce, pur essendo asintotica alla succ/ne $(b_n)_n$.

Il risultato che segue generalizza il criterio di Leibniz.

Proposizione 4.3 (criterio di Dirichlet). *Se la succ/ne delle somme parziali della serie* $\Sigma_n c_n$ *è limitata e la succ/ne* $(b_n)_n$ *è decrescente e inf/ma, allora la serie* $\Sigma_n c_n b_n$ *converge.*

Dim. Si omette ∎

5. La proprietà commutativa nelle serie

E' noto che $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots = \log 2$; moltiplicando ogni termine per $\frac{1}{2}$ e anteponendone uno 0 si ha $0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\ldots = \frac{1}{2}\log 2$; sommando termine a termine si ottiene $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots = \frac{3}{2}\log 2$. Eppure l'ultima serie è formata dagli stessi termini della prima (ogni termine negativo si presenta dopo due termini positivi).
Dunque *la proprietà commutativa dell'addizione non si estende alle serie*, almeno non a tutte.

Prima di esporre i risultati più importanti sull'argomento, precisiamo il significato di cambiamento dell'ordine dei termini di una serie: date le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, si dice che la seconda è un *riordinamento* della prima se $\exists\, j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bigettiva t.c. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \alpha_n = a_{j(n)}$.

Proposizione 5.1. *Se la serie $\Sigma_n a_n$ è a termini non negativi, allora ogni suo riordinamento $\Sigma_n \alpha_n$ ne conserva sia il carattere sia la somma.*

Dim. Premettiamo che le due serie $\Sigma_n a_n$ e $\Sigma_n \alpha_n$, essendo a termini non negativi, sono regolari. Sia $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una applicazione bigettiva t.c. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \alpha_n = a_{j(n)}$. Indicando con s_n, σ_n, s e σ le somme parziali e totali rispett/te di $\Sigma_n a_n$ e $\Sigma_n \alpha_n$, posto $m = \max\{j(1), j(2), \ldots, j(n)\}$, si vede che $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = a_{j(1)} + a_{j(2)} + \ldots + a_{j(n)} \le s_m \le s$, da cui segue che $\sigma \le s$. Scambiando i ruoli fra le due serie si ricava che $s \le \sigma$. Pertanto $s = \sigma$ ∎

Proposizione 5.2. *Se la serie $\Sigma_n a_n$ è assol/te convergente, allora ogni suo riordinamento $\Sigma_n \alpha_n$ è assol/te convergente ed ammette la stessa somma.*

Dim. L'ipotesi assicura che le serie $\Sigma_n a_n^+$ e $\Sigma_n a_n^-$ convergono. Ne discende, per la prop/ne precedente, che i rispettivi riordinamenti $\Sigma_n \alpha_n^+$ e $\Sigma_n \alpha_n^-$ convergono anch'essi e mantengono invariata la somma. Pertanto la serie $\Sigma_n |\alpha_n| = \Sigma_n (\alpha_n^+ + \alpha_n^-)$ converge ed inoltre $\Sigma_n \alpha_n = \Sigma_n \alpha_n^+ - \Sigma_n \alpha_n^- = \Sigma_n a_n^+ - \Sigma_n a_n^- = \Sigma_n a_n$ ∎

La prop/ne precedente stabilisce in sostanza che la proprietà commutativa vale quando le serie $\Sigma_n a_n^+$ e $\Sigma_n a_n^-$ sono entrambe convergenti. Con analogo ragionamento si dimostra che la proprietà vale anche nel caso in cui le due serie risultano una convergente e l'altra divergente.
Ben diverso è il caso in cui le due serie sono entrambe divergenti. Sussiste in particolare il seguente teorema.

Proposizione 5.3 (teorema di Riemann–Dini). *Se la serie $\Sigma_n a_n$ converge sempl/te, allora $\forall\, \sigma \in \overline{\mathbb{R}}$ esiste almeno un riordinamento che ha somma σ, ed inoltre esiste almeno un riordinamento non regolare.*

Dim. Si omette ∎

•) *E che dire infine della proprietà associativa?*
A questo proposito ci limitiamo ad osservare che, se la proprietà fosse valida, ci sarebbe di che preoccuparsi, dato che risulterebbe $0 = 0+0+0+\ldots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1+0+0+0+\ldots = 1$!

6. Esercizi

01. Calcolare la somma delle seguenti serie

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-(-2)^n}{5^{n/2}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |4\cos x - 1|^{\frac{n-1}{2}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (\frac{x}{\sqrt{x^2-3x}})^n$.

b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2+16n+15}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$,
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

02. Studiare le seguenti serie

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-10\log^2 n-8}{2n-(-1)^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}-\operatorname{sen} n-\cos n}$.

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1-\operatorname{sen} n \cos n)}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n}$.

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,
$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n!)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log(1+\frac{1}{\log(1+n)})$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log(n^2+1)}$,
$\sum_{n=1}^{\infty} [e^{\frac{1}{n}} - (1+\frac{2}{n})^{\alpha}]$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^x \log(x^2+\frac{1}{n})$.

d. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log \sqrt[n]{n}}{1+n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{(2n)!}}$.

e. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (1-\frac{1}{n})^{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen}\log n}{\log^n(n+2)}$,
$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\log n}{\log(n+1)})^{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (e^x + \frac{1}{n})^{-2n}$.

f. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x \log n}$, $\sum_{n=2}^{\infty} [e - (1+\frac{1}{\log n})^{\log n}]$,
$\sum_{n=2}^{\infty} (2 - e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{2}{n}})$, $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\log n}{\log(n+1)})^{n\sqrt{n}}$.

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{3n-2\operatorname{sen} n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{1+\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^{\log n}}$ $(x \in \mathbb{R}^+)$,
$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\log\log n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{n}-1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arccos e^{-\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}}$.

03. Posto $a_n = \frac{1}{2n-1}$ e $b_n = \frac{\log n - n}{2n^2+n-1}$, studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$.
Dire se il carattere di questa serie poteva essere dedotto da quello delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

04. Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$. Dire quanto vale il $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$.

05. Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \operatorname{sen} n}{n!}$.
Dire quanto vale il $\lim_{n\to\infty} (\frac{2^{n+1}\operatorname{sen}(n+1)}{(n+1)!} + \frac{2^{n+2}\operatorname{sen}(n+2)}{(n+2)!} + \dots \frac{2^{2n}\operatorname{sen}(2n)}{(2n)!})$.

06. Sia $a_n > 0 \ \forall n$. Provare che ($\Sigma_n a_n$ converge) $\Rightarrow$ ($\Sigma_n a_n^2$ converge).
Vale anche l'implicazione inversa?

07. Trovare una succ/ne $(a_n)_n$ tale che le serie $\Sigma_n a_n$ e $\sum_n \frac{1}{a_n}$ siano entrambe divergenti.
Esiste una succ/ne $(a_n)_n$ tale che le serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n \frac{1}{a_n}$ siano entrambe convergenti?

08. Trovare gli eventuali errori presenti nelle seguenti affermazioni riferite alla serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, dove $a_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\log_2 n}$:

a) La serie converge per confronto asintotico con la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log_2 n}$, che converge per il criterio di Leibniz.

b) La serie converge per il criterio di Leibniz; infatti la successione $(a_n)_n$ ha i termini di segno alterno, è infinitesima ed infine, per ciò che riguarda la decrescenza della successione $|a_n| = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\log_2 n}$, essa è provata dal fatto che decresce la successione, asintoticamente equivalente, $\frac{1}{\log_2 n}$.

c) La serie diverge positivamente in virtù della proprietà di additività, dato che la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge positivamente e la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log_2 n}$ converge per il criterio di Leibniz.