Serie numeriche

Applicazione del criterio del confronto asintotico

Studiare le seguenti serie numeriche

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Soluzione

La serie è a termini positivi, quindi è regolare. La studiamo con il criterio del confronto asintotico e facciamo vedere che **è convergente**.
Osserviamo che il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

suggerisce che sussiste il seguente limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$,

pertanto per n→+∞ risulta $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. Questa conclusione permette di affermare che la serie in esame ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, che com'è noto è convergente, quindi converge anche la serie assegnata.

Formalmente, applicando il criterio del confronto asintotico, si scrive:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$$

ed avendo ottenuto come risultato del limite del rapporto dei termini delle due serie un valore finito diverso da zero, le due serie hanno lo stesso carattere, precisamente, sono convergenti. C.V.D.

*** ***

b)[1] $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \log\left(1+\frac{x^2}{n}\right)$, con $x \in R$

Soluzione

Osserviamo che con x=0 la serie numerica ha tutti i termini nulli, quindi converge a zero.
Per $x\neq 0$, tenendo conto di quanto sviluppato nel precedente esempio a), possiamo far vedere che la serie in esame ha ancora lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, e quindi converge. Infatti, risulta:

[1] Esercizio della Prova d'Esame di Analisi Matematica I-Ingegneria- Lecce-16-02-2009

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}{\frac{1}{n}\cdot x^2}\cdot x^2=x^2\neq 0.$$ C.V.D.

*** ***

c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}sen\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

Soluzione

La serie è a termini positivi, quindi è regolare. Applicando ancora il criterio del confronto possiamo provare che la serie ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, che è **convergente**. Infatti, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}sen\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right):\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(sen\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right):\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(sen\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right):\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{sen(t)}{t}=1$$ C.V.D

*** ***

d)[2] $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\log n}$

Soluzione

La serie è a termini positivi, quindi è regolare. Elaboriamo il termine generale della serie.

$$a_n=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\log n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\log n}=\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\log n}$$

Evidentemente risulta $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$, dunque è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza. Faremo vedere invece che **la serie è divergente positivamente**.

Infatti, ricordiamo che sussiste il seguente limite notevole

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^r}=0,\ \forall r\in R^+$$

Ciò premesso, preso $r\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$, possiamo confrontare la serie in esame con la serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+r}}$, che è divergente. Per il limite del rapporto dei termini generali delle due serie risulta:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+r}}:\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\log n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\log n}{n^r}=2\cdot0=0$$

[2] Esercizio della Prova d'Esame di Analisi Matematica I-Ingegneria- Lecce-09-12-2008

Pertanto, il termine generale della serie in esame, per $n \to +\infty$, è un infinitesimo avente ordine inferiore a quello della serie armonica generalizzata di riferimento e poiché quest'ultima diverge (positivamente) sarà anche divergente positivamente la serie in questione.

*** ***

e)[3] $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!\sqrt{n}}{(n+2)!}$

Soluzione

Osserviamo che la serie ha i termini a segno alterno; si potrebbe pensare di applicare il Criterio di Leibniz per lo studio del suo carattere, ma non è il caso. Infatti, considerando la serie dei moduli si nota che

$$|a_n| = \frac{n!\sqrt{n}}{(n+2)!} = \frac{n!\sqrt{n}}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{\sqrt{n}}{(n+2)(n+1)},$$

dunque la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n n!\sqrt{n}}{(n+2)!} \right|$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+2)(n+1)}$, che a sua volta ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, che è convergente.

Concludiamo che la serie in esame **è assolutamente convergente e quindi anche semplicemente convergente**.

[3] Esercizio della Prova d'Esame di Analisi Matematica I-Ingegneria- Lecce-12-01-2009