

FACOLTÀ DI SCIENZE – CDL IN FISICA
PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA III

Prof. C. De Mitrì – Lecce, 12.09.2013 –

- 1) Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione delle funzioni $f_n(x) = \begin{cases} n \sin(nx) & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{n} \leq x \leq \pi \end{cases}$, $x \in [0, \pi]$.
- a) Studiare la convergenza puntuale e determinare la funzione limite f .
- b) Studiare la convergenza uniforme in tutto l'insieme di convergenza. Se la successione non converge unif/te nell'insieme di convergenza, determinare gli insiemi in cui converge unif/te.
- c) Dire se $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f_n(x) dx = \int_0^\pi f(x) dx$.

- 2) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' - y' - 2y = -3(x+1)e^{-x}$$

Individuare le eventuali soluzioni y tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$.

- 3) Posto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x|x|\}$, calcolare

$$\iint_D y \, dx \, dy$$

e verificare il risultato usando una delle formule di Gauss–Green.

Infine determinare il baricentro di D .

- 4) Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, calcolare gli estremi della funzione $f(x, y, z) = x - y^2 + 2z^2$ sull'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z = 0, x - 2z \geq 0\}.$$

SOLUZIONI

1) Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione delle funzioni $f_n(x) = \begin{cases} n \sin(nx) & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{n} \leq x \leq \pi \end{cases}, x \in [0, \pi].$

a) Studiare la convergenza puntuale e determinare la funzione limite f .

b) Studiare la convergenza uniforme in tutto l'insieme di convergenza. Se la successione non converge unif/te nell'insieme di convergenza, determinare gli insiemi in cui converge unif/te.

c) Dire se $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f_n(x) dx = \int_0^\pi f(x) dx$.

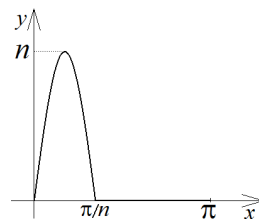
Per $x = 0$ risulta $f_n(x) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; per $x > 0$ risulta $f_n(x) = 0$ per ogni $n > \frac{\pi}{x}$. Pertanto la successione converge punt/te in tutto l'intervallo $[0, \pi]$ e la funzione limite è $f(x) = 0, x \in [0, \pi]$.

Si ha: $\sup_{x \in [0, \pi]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in [0, \pi/n]} f_n(x) = f_n(\frac{\pi}{2n}) = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, cosicché $f_n \not\xrightarrow{n} f$ in $[0, \pi]$.

Preso $a \in]0, \pi[$, per $n > \frac{\pi}{a}$ si ha che $f_n(x) = 0 \forall x \in [a, \pi]$; ne segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, \pi]} |f_n(x) - f(x)| = 0$, cosicché $f_n \xrightarrow{n} f$ in $[a, \pi]$.

Il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale nell'intervallo $[0, \pi]$ non può essere applicato.

Si calcola $\int_0^\pi f_n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{n}} n \sin(nx) dx = 2$, mentre $\int_0^\pi f(x) dx = 0$: l'uguaglianza non sussiste.



◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

2) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' - y' - 2y = -3(x+1)e^{-x}$$

Individuare le eventuali soluzioni y tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$.

Equazione lineare del 2° ordine a coefficienti costanti.

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono -1 e 2 , entrambe semplici; quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea associata è $c_0 e^{-x} + c_1 e^{2x}$, $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

In base al metodo della somiglianza, tenuto conto del fatto che -1 è soluzione della caratteristica, si cerca un integrale particolare del tipo $\bar{y} = (ax^2 + bx)e^{-x}$, e si trova $\bar{y} = (\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x)e^{-x}$.

Pertanto l'integrale generale dell'equazione assegnata è $y = (\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x + c_0)e^{-x} + c_1 e^{2x}$, $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

Imponendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ si ricava $c_1 = 0$; anche imponendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$ si ricava $c_1 = 0$. Quindi esistono infinite soluzioni che soddisfano la condizione richiesta, e sono $y = (\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x + c)e^{-x}$, $c \in \mathbb{R}$.

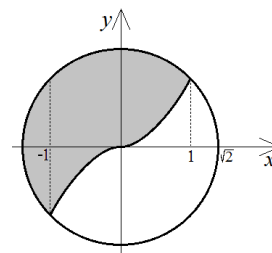
◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

- 3) Posto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x|x|\}$, calcolare

$$\iint_D y \, dx \, dy$$

e verificare il risultato usando una delle formule di Gauss–Green.

Infine determinare il baricentro di D .



Posto $D_1 = \{(x, y) \in D / x \leq -1\}$ e $D_2 = \{(x, y) \in D / x \geq -1\}$, si vede che, per ragioni di simmetria, $\iint_{D_1} y \, dx \, dy = 0$, e quindi $\iint_D y \, dx \, dy =$

$$\iint_{D_2} y \, dx \, dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x|x|}^{\sqrt{2-x^2}} y \, dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^4) \, dx = \frac{22}{15}.$$

Posto $\gamma_1 \equiv \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \end{cases}, t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, e $\gamma_2 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t|t| \end{cases}, t \in [-1, 1]$, si vede

che $\partial D^+ = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Usando la 1ª formula di Gauss–Green si calcola: $\iint_D \frac{\partial}{\partial x}(xy) \, dx \, dy = \int_{\partial D^+} xy \, dy = \int_{\gamma_1} xy \, dy + \int_{\gamma_2} xy \, dy = 2\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos^2 t \sin t \, dt + 2 \int_{-1}^1 t^4 \, dt = \dots = \frac{22}{15}$.

Anche il calcolo di $m_2(D)$ si può effettuare agevolmente usando una delle formule di Gauss–Green; oppure si osserva che la regione D equivale ad un semicerchio di raggio $\sqrt{2}$, quello che si ottiene ad esempio spostando nel primo quadrante, in posizione simmetrica rispetto all'origine, la parte di D che giace nel terzo quadrante. Dunque $m_2(D) = \pi$.

Pertanto il baricentro G ha ordinata $y_G = \frac{1}{m_2(D)} \iint_D y \, dx \, dy = \frac{22}{15\pi} \simeq 0,47$.

In modo analogo si calcola l'ascissa $x_G = \frac{1}{m_2(D)} \iint_D x \, dx \, dy = -\frac{7}{6\pi} \simeq -0,37$.

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

- 4) Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, calcolare gli estremi della funzione

$$f(x, y, z) = x - y^2 + 2z^2 \text{ sull'insieme}$$

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z = 0, x - 2z \geq 0\}.$$

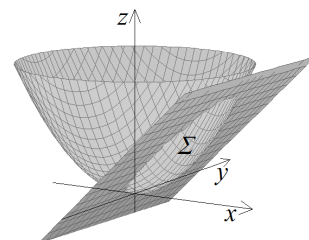
Il vincolo Σ è una superficie limitata, e precisamente è la porzione del paraboloide $z = x^2 + y^2$ staccata dal piano $z = \frac{1}{2}x$, ossia quella contenuta nel cilindro $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}x$.

Poniamo $\Sigma^* = \{(x, y, z) \in \Sigma / x - 2z > 0\}$, che è l'insieme degli zeri di $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ nell'aperto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2z > 0\}$.

Introdotta la funzione $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda G(x, y, z)$, si trova che il gradiente di L non si annulla in corrispondenza di nessun punto di Σ^* .

Detto Γ il bordo di Σ , $\Gamma = \Sigma \setminus \Sigma^* = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z = 0, x - 2z = 0\}$, si considera la funzione $H(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda G(x, y, z) - \mu(x - 2z)$ e si calcola che il suo gradiente è nullo in corrispondenza dei punti $(0, 0, 0)$ e $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$.

Dal confronto dei valori di f nei due punti trovati si scopre che $\min_{\Sigma} f = f(0, 0, 0) = 0$ e $\max_{\Sigma} f = f(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}) = \frac{5}{8}$.



◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇
◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇
◇◇◇