Limiti[1]

Considerata la funzione

$$f(x)=\left(\frac{x^2-x+2}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$$

studiare i seguenti limiti

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Soluzione

Per studiare i limiti proposti è necessario determinare il dominio di definizione della funzione per rendersi conto se i punti in cui si chiede di studiare il comportamento della funzione siano o meno di accumulazione.

A tal proposito osserviamo che la funzione potenza con esponente reale richiede che la base sia strettamente positiva; per quanto concerne l'esponente la condizione per l'esistenza è che sia x≠0.

La disuguaglianza $\frac{x^2-x+2}{x-1}>0$ è soddisfatta solo con x>1 e dunque il dominio della funzione è l'intervallo D=]1;+∞[. A questo punto si riconosce che il punto x=0 non è di accumulazione per il dominio di definizione, quindi il limite $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ non ha senso.

Per quanto concerne il limite $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ha senso e si presenta nella forma indeterminata $(+\infty)^{0^+}$.

Infatti risulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{+\infty(1-0+0)}{1-0}=+\infty\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+.$$

Per studiare il limite scriviamo la funzione nella forma esponenziale-logaritmica come segue

$$\left(\frac{x^2-x+2}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\left(\frac{x^2-x+2}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{x^2-x+2}{x-1}\right)}$$

Occupiamoci ora del limite dell'esponente e facciamo vedere che esiste, successivamente, utilizzeremo il teorema sul limite di una funzione composta per acquisire il risultato.

[1] Esercizio assegnato nella prova d'esame di Matematica l'8-09-2014 nel corso CTF, Bari

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{x^2-x+2}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2-x+2}{x-1}\right)}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞/∞ e può essere affrontato applicando la regola di de l'Hôpital. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2-x+2}{x-1}\right)}{x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-1}{x^2-x+2}\cdot\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-1}{(x^2-x+2)(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)(x-1)}=\frac{(1-0-0)}{(1-0+0)(+\infty-1)}=\frac{1}{+\infty}=0^+$$

Conclusione

Come anticipato, in virtù del teorema sul limite di una funzione composta, posto $y=\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{x^2-x+2}{x-1}\right)$ ed avendo ottenuto che $\lim_{x\to+\infty}y=0^+$ si può concludere che $\lim_{y\to0^+}e^y=1$, quindi il limite in esame vale 1.