Equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti

Problema di Cauchy

Si debba risolvere l'equazione

$ay'+by=c$, con la condizione $y(x_0)=y_0$ (1)

con a, b, c costanti reali, nell'incognita y=y(x).

Osserviamo che nella (1) deve essere $a\neq 0$ perché con a=0 la (1) non contenendo la funzione derivata prima non sarebbe un'equazione differenziale. Tuttavia, se a=0 e b≠0 l'equazione $by=c$ ammette l'unica soluzione y=c/b e se $\frac{c}{b}\neq y_0$ evidentemente la soluzione y=c/b non è accettabile. Riteniamo quindi $a\neq 0$.

Con tale ipotesi si possono dividere i due membri dell'equazione $ay'+by=c$ per a ottenendo

$$y'+\frac{b}{a}y=\frac{c}{a}.$$

Ponendo brevemente $\frac{b}{a}=A$, $\frac{c}{a}=B$ il problema di Cauchy si formalizza come segue

$$\begin{cases} y'+Ay=B \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \qquad (2)$$

con A e B costanti reali che possono essere anche nulle.

Sussistono i seguenti casi

- **Caso A=0**

  La soluzione del problema di Cauchy è da ricercare tra le funzioni $y(x)=Bx+C$, con C costante da determinare ed il suo valore si determina imponendo che la funzione soddisfi la condizione iniziale $y(x_0)=y_0$; pertanto deve risultare $Bx_0+C=y_0$, da cui $C=y_0-Bx_0$. Concludiamo che la soluzione del problema di Cauchy è la funzione $y(x)=Bx+y_0-Bx_0$.

- **Caso A≠0 e B≠0**

  Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione $y'+Ay=B$ per e^{Ax} ottenendo

  $$y'e^{Ax}+Aye^{Ax}=Be^{Ax} \qquad (3)$$

  Al primo membro della (3) figura la derivata prima della funzione $y(x)e^{Ax}$, quindi si può scrivere

  $$D\left(y(x)e^{Ax}\right)=Be^{Ax} \qquad (3.1)$$

  Integriamo entrambi i membri della (3.1)

$\int D\left(y(x)e^{Ax}\right)dx = \int Be^{Ax}dx$, da cui si ha

$y(x)e^{Ax} = \frac{B}{A}e^{Ax} + C$, con C costante arbitraria ed ancora

$$y(x) = \frac{B}{A} + C \cdot e^{-Ax} \qquad (3.2)$$

Al variare di C la (3.2) rappresenta l'integrale generale dell'equazione differenziale in oggetto.

Ricerca della soluzione del problema di Cauchy

La soluzione del problema di Cauchy si ricava determinando il valore della corrispondente costante C e ciò si ottiene richiedendo che l'integrale richiesto verifichi la condizione $y(x_0) = y_0$.

Dunque deve risultare $y(x_0) = \frac{B}{A} + C \cdot e^{-Ax_0} = y_0$, quindi $C = \left(y_0 - \frac{B}{A}\right)e^{Ax_0}$.

La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{B}{A} + \left(y_0 - \frac{B}{A}\right)e^{A(x_0 - x)} \qquad (3.3)$$

- **Caso A≠0 e B=0**

In questo caso la soluzione al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + Ay = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (4)$$

si può ottenere direttamente dalla (3.3) ponendo B=0, quindi

$$y(x) = y_0 e^{A(x_0 - x)} \qquad (4.1)$$

Si può tuttavia ottenere velocemente il risultato integrando l'equazione **separando le due variabili**.

$y' + Ay = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} + Ay = 0 \rightarrow \frac{dy}{y} = -Adx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -Adx$ da cui

$\log|y| = -Ax + C \rightarrow |y| = e^{-Ax+C} \rightarrow y = ke^{-Ax}$

L'integrale generale dell'equazione (omogenea) in oggetto è

$y = ke^{-Ax}$, con k costante arbitraria.

Imponendo che sia soddisfatta la condizione $y(x_0) = y_0$ si determina il corrispondente valore del parametro k.

$y(x_0) = ke^{-Ax_0} = y_0 \rightarrow k = y_0 e^{Ax_0}$ e quindi si perviene alla soluzione del problema

$$y(x)= y_0 e^{Ax_0} \cdot e^{-Ax} = y_0 e^{A(x_0-x)}$$

Esercizi risolti

1) $\begin{cases} 4y'+2y=1 \\ y(-1)=2 \end{cases}$

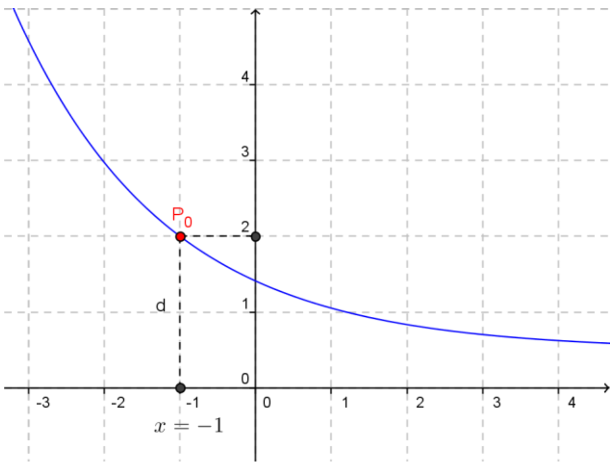
Elaborazioni

$$4y'+2y=1 \rightarrow y'+\frac{1}{2}y=\frac{1}{4} \rightarrow \left(y'+\frac{1}{2}y\right)e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{x}{2}} \rightarrow y'e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}ye^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{x}{2}} \rightarrow$$

$$D\left(ye^{\frac{x}{2}}\right)=\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{x}{2}} \rightarrow \int D\left(ye^{\frac{x}{2}}\right)dx=\int \frac{1}{4}\cdot e^{\frac{x}{2}}dx \rightarrow ye^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}+C \rightarrow$$

$y=\frac{1}{2}+C\cdot e^{-\frac{x}{2}}$ (integrale generale dell'equazione differenziale).

Per trovare l'integrale particolare che è soluzione del problema di Cauchy imponiamo la condizione iniziale $y(-1)=2$.



$y(-1)=\frac{1}{2}+C\cdot e^{\frac{1}{2}}=2$, da cui $C=\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

La soluzione richiesta è

$$y=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}(x+1)}.$$

*** ***

2) $\begin{cases} 2y'-y=-4 \\ y(1)=1 \end{cases}$

Elaborazioni

$$2y'-y=-4 \rightarrow y'-\frac{1}{2}y=-2 \rightarrow \left(y'-\frac{1}{2}y\right)e^{-\frac{x}{2}}=-2\cdot e^{-\frac{x}{2}} \rightarrow y'e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}ye^{-\frac{x}{2}}=-2\cdot e^{-\frac{x}{2}} \rightarrow$$

$$D\left(ye^{-\frac{x}{2}}\right)=-2\cdot e^{-\frac{x}{2}} \rightarrow \int D\left(ye^{-\frac{x}{2}}\right)dx=\int -2\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx \rightarrow ye^{-\frac{x}{2}}=4\cdot e^{-\frac{x}{2}}+C \rightarrow$$

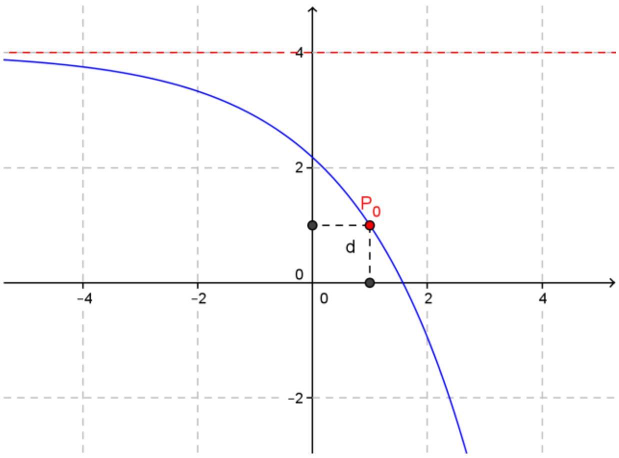
$y=4+C\cdot e^{\frac{x}{2}}$ (integrale generale dell'equazione differenziale).

Ricerca della soluzione del problema di Cauchy .

Imponiamo la condizione iniziale $y(1)=1$.

$y(1) = 4 + C \cdot e^{\frac{1}{2}} = 1$, da cui $C = -3e^{-\frac{1}{2}}$. La soluzione richiesta è

$$y = 4 - 3 \cdot e^{\frac{x-1}{2}}.$$



*** ***

3) $\begin{cases} y' + 3y = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Elaborazioni

Risolviamo l'equazione differenziale **separando le due variabili**.

$$y' + 3y = 0 \rightarrow y' = -3y \rightarrow \frac{dy}{dx} = -3y \rightarrow \frac{dy}{y} = -3dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -3dx$$

da cui si ottiene $\log|y| = -3x + C \rightarrow |y| = e^{-3x+C}$, quindi si ha l'integrale generale

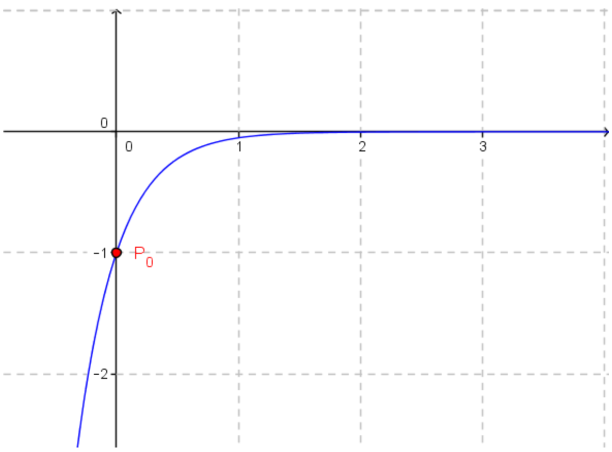
$y = ke^{-3x}$, con k costante arbitraria.

Ricerca della soluzione del problema di Cauchy

Imponendo il rispetto della condizione $y(0) = -1$ si ottiene

$y(0) = ke^0 = -1 \rightarrow k = -1$.

La soluzione richiesta è $y = -e^{-3x}$.



Esercizi da risolvere

a) $\begin{cases} y' - 3y = -1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad R: y(x) = \frac{1}{3}\left(2e^{3x} + 1\right)$

b) $\begin{cases} y' + \frac{1}{2}y = -2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $\qquad R: y(x) = 5e^{\frac{1-x}{2}} - 4$

c) $\begin{cases} y' + 2y = 0 \\ y(1) = -1 \end{cases}$ $\qquad R: y(x) = -e^{2-2x}$