

Integrale generalizzato

Studiare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1 - \log x}{\sqrt{x}} dx$$

Soluzione

Osserviamo che la funzione integranda non è definita nell'estremo inferiore di integrazione ed in particolare risulta $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \log x}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Occupiamoci del calcolo dell'integrale indefinito che si affronta con il **metodo di integrazione per parti**.

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \log x}{\sqrt{x}} dx &= \int x^{-\frac{1}{2}} (1 - \log x) dx = \int D\left(2x^{\frac{1}{2}}\right) (1 - \log x) dx = 2x^{\frac{1}{2}} (1 - \log x) - \int \left(2x^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) dx = \\ &= 2\sqrt{x} (1 - \log x) + 2 \int \left(x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = 2\sqrt{x} (1 - \log x) + 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x} (1 - \log x) + 4\sqrt{x} + c = 6\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \log x + c \end{aligned}$$

Integrale generalizzato

Si deve studiare il seguente limite

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1 - \log x}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[6\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \log x \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[(6 - 0) - (6\sqrt{\varepsilon} - 2\sqrt{\varepsilon} \log \varepsilon) \right] = 6 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 6\sqrt{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2\sqrt{\varepsilon} \log \varepsilon = \\ &= 6 - 0 + 0 = 6 \end{aligned}$$

L'integrale in esame converge.

Osservazione

Nel calcolo dell'integrale generalizzato si è tenuto presente il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \log x = 0, \text{ valido } \forall r > 0.$$

Discussione particolare sulla convergenza

L'integrale può essere decomposto nella somma dei due seguenti integrali generalizzati

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_0^1 \frac{-\log x}{\sqrt{x}} dx$, dei quali è noto che il primo converge perché per $x \rightarrow 0^+$ la funzione integranda è un infinito di ordine $0,5 < 1$. Infatti, eseguendo il calcolo risulta

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_{\delta}^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} 2(1 - \sqrt{\delta}) = 2$$

Per quanto concerne il secondo integrale fissiamo un numero reale positivo $0 < r < 0,5$. Dalla sussistenza del limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \cdot (-\log x) = 0$, in corrispondenza di un qualsiasi valore $\varepsilon > 0$ sappiamo che esiste un intorno destro di $x=0$, $I_\varepsilon^+(0) =]0; \delta_\varepsilon[$, con $0 < \delta_\varepsilon < 1$, in cui si verifica la disuguaglianza $|x^r \cdot (-\log x)| < \varepsilon$, la quale, essendo in $]0; 1[$ sia $-\log x > 0$, sia $x^r > 0$, è equivalente alla doppia disuguaglianza $0 < x^r \cdot (-\log x) < \varepsilon$ e perciò nell'intervallo $I_\varepsilon^+(0) =]0; \delta_\varepsilon[$ sussiste la doppia disuguaglianza $0 < -\log x < \frac{\varepsilon}{x^r}$.

Per l'integrale $\int_0^1 \frac{-\log x}{\sqrt{x}} dx$ possiamo scrivere

$$\int_0^1 \frac{-\log x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\delta_\varepsilon} \frac{-\log x}{\sqrt{x}} dx + \int_{\delta_\varepsilon}^1 \frac{-\log x}{\sqrt{x}} dx \quad (*)$$

Ebbene, la funzione $\frac{-\log x}{\sqrt{x}}$ nell'intervallo chiuso $[\delta_\varepsilon; 1]$ è continua, quindi è integrabile (il valore dell'integrale in oggetto è un numero positivo finito). Per il primo integrale che figura al secondo membro della (*) osserviamo che per ogni $x \in]0; \delta_\varepsilon[$ risulta $\frac{-\log x}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\varepsilon}{x^r} = \frac{\varepsilon}{x^{0,5+r}}$, con $0,5+r < 1$. Poiché l'integrale generalizzato

$\int_0^{\delta_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{x^{0,5+r}} dx$ converge ad un numero positivo, valendo la disuguaglianza $0 < \int_0^{\delta_\varepsilon} \frac{-\log x}{\sqrt{x}} dx < \int_0^{\delta_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{x^{0,5+r}} dx$ si conclude

che converge anche l'integrale $\int_0^{\delta_\varepsilon} \frac{-\log x}{\sqrt{x}} dx$. In definitiva, converge l'integrale $\int_0^1 \frac{-\log x}{\sqrt{x}} dx$ ed avendo provato

che converge anche l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ si conclude che converge l'integrale $\int_0^1 \frac{1-\log x}{\sqrt{x}} dx$.