

Integrale generalizzato⁽¹⁾

Studiare il seguente integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+x^4} dx$$

Elaborazioni

Osservazione

La funzione integranda nell'intervallo $[1; +\infty[$ è continua e per $x \rightarrow +\infty$ è un infinitesimo di ordine 4, pertanto l'integrale è convergente ed il suo valore è un numero reale positivo.

*** **

Per studiare l'integrale in esame si deve studiare il seguente limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k \frac{1}{x+x^4} dx$$

Studio dell'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x+x^4} dx$$

Il polinomio al denominatore si può scomporre in fattori: $x(1+x^3) = x(1+x)(1-x+x^2)$.

La funzione integranda si può decomporre nella forma

$$\frac{1}{x(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \quad (1)$$

Valori delle costanti A_1, A_2, B, C

$$\text{Risulta } A_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(1+x)(1-x+x^2)} = 1; \quad A_2 = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x(1+x)(1-x+x^2)} = -\frac{1}{3}$$

Quindi l'uguaglianza (1) assume la forma seguente

$$\frac{1}{x(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}, \text{ che diventa}$$

$$\frac{1}{x(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{3(x^3+1) - x(x^2-x+1) + 3x(x+1)(Bx+C)}{3x(x+1)(x^2-x+1)},$$

da cui, dopo alcune elaborazioni si perviene all'uguaglianza

⁽¹⁾ Esercizio assegnato nella prova d'esame di Analisi matematica II il 10/06/2014 nel CDL in Fisica- Lecce

$(3B+2)x^3 + (3B+3C+1)x^2 + (3C-1)x = 0$, quindi le costanti B e C devono verificare il sistema

$$\begin{cases} 3B+2=0 \\ 3B+3C+1=0, \text{ da cui si ottiene} \\ 3C-1=0 \end{cases} \begin{cases} B=-\frac{2}{3} \\ C=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Calcolo dell'integrale indefinito

$$I = \int \frac{1}{x+x^4} dx = \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = \log|x| - \frac{1}{3} \log|x+1| - \frac{1}{3} \log|x^2-x+1| + c$$

con c costante reale arbitraria.

Integrale definito

$$\begin{aligned} \int_1^k \frac{1}{x+x^4} dx &= \left[\log|x| - \frac{1}{3} \log|x+1| - \frac{1}{3} \log|x^2-x+1| \right]_1^k = \left[\log k - \frac{1}{3} \log(k+1) - \frac{1}{3} \log(k^2-k+1) \right] + \\ &- \left[0 - \frac{1}{3} \log 2 - \frac{1}{3} \cdot 0 \right] = \log k - \frac{1}{3} \log(k+1) - \frac{1}{3} \log(k^2-k+1) + \frac{1}{3} \log 2 = \\ &\frac{3 \log k - \log(k+1) - \log(k^2-k+1)}{3} + \frac{1}{3} \log 2 = \frac{1}{3} \log \frac{k^3}{k^3+1} + \frac{1}{3} \log 2 \end{aligned}$$

Studio del limite

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k \frac{1}{x+x^4} dx &= \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \log \frac{k^3}{k^3+1} + \frac{1}{3} \log 2 \right) &= \\ \frac{1}{3} \log 1 + \frac{1}{3} \log 2 &= \frac{1}{3} \log 2 \end{aligned}$$

Concludiamo che l'integrale generalizzato in esame converge e vale $\frac{1}{3} \log 2 \approx 0,231049$.

