

Studio degli integrali indefiniti

$$\int \frac{1}{\cos x} dx, \int \frac{1}{\cos^3 x} dx, \int \frac{1}{\cos^{2n+1} x} dx, \int \frac{1}{\cos^{2n} x} dx$$

- 1) $\int \frac{1}{\cos x} dx$ Questo integrale si studia esprimendo $\cos x$ in funzione di $\tan(x/2)$.

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 1} \right| + c$$

- 2) $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$ Questo integrale si può studiare agevolmente applicando il **metodo di integrazione per parti**. Infatti possiamo scrivere

$$\frac{1}{\cos^3 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot D(\tan x)$$

...

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 1} \right| + c$$

- 3) $\int \frac{1}{\cos^{2n+1} x} dx$, con $n \in \mathbb{N}$. Applicando il **metodo di integrazione per parti** si può ricavare una **formula ricorsiva** che permette di ricondursi dopo n passaggi all'integrale $\int \frac{1}{\cos x} dx$.

- 4) $I_{2n} = \int \frac{1}{\cos^{2n} x} dx$, con $n \in \mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \dots\}$

Caso $n=1$ → L'integrale è immediato. $I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

Caso $n>1$

L'integrale si affronta con il **metodo di integrazione per parti** e si determina una formula ricorsiva tramite la quale il calcolo si riduce a quello dell'integrale $I_{2(n-1)} = I_{2n-2}$; dopo $(n-1)$ passaggi rimane da calcolare l'integrale I_2 , riportato sopra. Segue lo studio.

Esempio

Calcolo dell'integrale $\int \frac{1}{\cos^6 x} dx$.

Elaborazioni

$$\int \frac{1}{\cos^6 x} dx = I_6 = \dots = \frac{\sin x}{5 \cos^5 x} + \frac{4}{15} \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{8}{15} \cdot \tan x + c$$

Nota_1) Ricordiamo che sussistono le due seguenti formule

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}};$$

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \text{ valide}$$

per ogni $x \neq \pi + 2k\pi$, essendo $k \in \mathbb{Z}$.

...

Nota_2) Ricordiamo che sussiste la seguente regola di integrazione (detta di **integrazione per parti**)

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx =$$

$$f(x) \cdot g(x) -$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Nota_3) Ricordiamo che $D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$