Studio degli integrali indefiniti

$$\int \frac{1}{\cos x}dx\ ,\ \int \frac{1}{\cos^3 x}dx\ ,\ \int \frac{1}{\cos^{2n+1} x}dx\ ,\ \int \frac{1}{\cos^{2n} x}dx$$

1) $\int \frac{1}{\cos x}dx$ Questo integrale sui studia esprimendo cosx in funzione di tg(x/2). Pertanto l'integrale diventa

$\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{1+tg^2\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}dx$. A questo punto si applica il metodo di sostituzione ponendo $tg\frac{x}{2}=t$, da cui $x=2arctgt$ e quindi $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$. Si ottiene l'integrale

$\int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = -2\int\frac{dt}{t^2-1}$. Si decompone la funzione integranda come segue

$\frac{1}{t^2-1}=\frac{1}{(t+1)(t-1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}$ e risulta $A=\lim_{t\to -1}\frac{1}{t-1}=-\frac{1}{2}$, $B=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t+1}=\frac{1}{2}$.

In definitiva si ha

$$-2\int\frac{dt}{t^2-1} = -2\left(\int -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1}\right)dt = \int\frac{1}{t+1}dt-\int\frac{1}{t-1}dt =$$

$\log|t+1|-\log|t-1|+c = \log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+c$; tornando alla variabile x si ottiene

$$\int\frac{1}{\cos x}dx = \log\left|\frac{tg\frac{x}{2}+1}{tg\frac{x}{2}-1}\right|+c$$

2) $\int\frac{1}{\cos^3 x}dx$ Questo integrale si può studiare agevolmente applicando il **metodo di integrazione per parti**. Infatti possiamo scrivere

$\frac{1}{\cos^3 x}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\cdot D(tgx)$ e quindi

$$\int\frac{1}{\cos^3 x}dx=\int\frac{1}{\cos x}\cdot D(tgx)dx=\frac{1}{\cos x}\cdot tgx-\int tgx\cdot D\left(\frac{1}{\cos x}\right)dx=\frac{senx}{\cos^2 x}-$$

$$\int\frac{senx}{\cos x}\cdot(-1)(\cos x)^{-2}(-senx)dx=\frac{senx}{\cos^2 x}-\int\frac{sen^2 x}{\cos^3 x}dx=\frac{senx}{\cos^2 x}-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}dx=$$

$\frac{senx}{\cos^2 x}-\int\frac{1}{\cos^3 x}dx+\int\frac{1}{\cos x}dx$ A questo punto si trasporta al primo membro l'integrale $-\int\frac{1}{\cos^3 x}dx$ e si ottiene

$2\int\frac{1}{\cos^3 x}dx=\frac{senx}{\cos^2 x}+\int\frac{1}{\cos x}dx$, da cui la formula

$$\int\frac{1}{\cos^3 x}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{senx}{\cos^2 x}+\int\frac{1}{\cos x}dx\right)$$

L'integrale residuo è stato calcolato nel precedente esercizio, quindi si ha

Nota_1) Ricordiamo che sussistono le due seguenti formule

$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$;

$senx=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, valide per ogni $x\neq\pi+2k\pi$, essendo $k\in Z$.

Le formule precedenti sono note anche come formule parametriche per l'espressione delle funzioni elementari senx, cosx in funzione di tg(x/2) e si riportano nelle seguenti forme

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$senx=\frac{2t}{1+t^2}$, con $t\in R$.

Nota_2) Ricordiamo che sussiste la seguente regola di integrazione (detta di **integrazione per parti**)

$\int f'(x)\cdot g(x)dxf = f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)dx$

Nota_3) Ricordiamo che $D(tgx)=\frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int \frac{1}{\cos^3 x}dx = \frac{senx}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{tg\frac{x}{2}+1}{tg\frac{x}{2}-1}\right|+c$$

3) $\int \frac{1}{\cos^{2n+1}x}dx$, con n∈N. Applicando il **metodo di integrazione per parti** si può **ricavare una formula ricorsiva** che permette di ricondursi dopo n passaggi all'integrale $\int \frac{1}{\cos x}dx$.

$\mathrm{I}_{2n+1} = \int \frac{1}{\cos^{2n+1}x}dx = \int \frac{1}{\cos^{2n-1}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^{2n-1}x}\cdot D(tgx)dx =$

$\frac{1}{\cos^{2n-1}x}\cdot tgx - \int tgxD(\cos x)^{-(2n-1)}dx = \frac{1}{\cos^{2n-1}x}\cdot\frac{senx}{\cos x} -$

$(2n-1)\int \frac{sen^2 x}{\cos x}\cdot(\cos x)^{-2n}dx = \frac{senx}{\cos^{2n}x}-(2n-1)\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^{2n+1}x}dx =$

$\frac{senx}{\cos^{2n}x}-(2n-1)\int\left(\frac{1}{\cos^{2n+1}x}-\frac{1}{\cos^{2n-1}x}\right)dx = \frac{senx}{\cos^{2n}x}-(2n-1)I_{2n+1}+$

$(2n-1)\int\frac{1}{\cos^{2n-1}x}dx$, da cui, portando al primo membro il termine

$-(2n-1)I_{2n+1}$, si ricava $2nI_{2n+1} = \frac{senx}{\cos^{2n}x}+(2n-1)\int\frac{1}{\cos^{2(n-1)+1}x}dx$, quindi la formula ricorsiva

$$I_{2n+1} = \frac{senx}{2n\cos^{2n}x}+\frac{2n-1}{2n}\int\frac{1}{\cos^{2(n-1)+1}x}dx = \frac{senx}{2n\cos^{2n}x}+\frac{2n-1}{2n}\cdot I_{2(n-1)+1}$$

Dopo n passaggi l'integrale residuo da calcolare sarà $I_1 = \int\frac{1}{\cos x}dx$, già risolto.

4) $\mathrm{I}_{2n} = \int\frac{1}{\cos^{2n}x}dx$, con n∈N$_0$={1,2,3,…}

Caso n=1→L'integrale è immediato. $\mathrm{I}_2 = \int\frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + c$

Caso n>1
L'integrale si affronta con il metodo di integrazione per parti e si determina una formula ricorsiva tramite la quale il calcolo si riduce a quello dell'integrale $\mathrm{I}_{2(n-1)} = \mathrm{I}_{2n-2}$; dopo (n-1) passaggi rimane da calcolare l'integrale I_2, riportato sopra. Segue lo studio.

$\mathrm{I}_{2n} = \int\frac{1}{\cos^{2n}x}dx = \int\frac{1}{\cos^{2n-2}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int\frac{1}{\cos^{2n-2}x}\cdot D(tgx)dx =$

$\frac{1}{\cos^{2n-2}x}\cdot tgx - \int tgx\cdot D\left(\cos^{-2n+2}x\right)dx =$

$\frac{1}{\cos^{2n-2}x}\cdot tgx - \int\frac{senx}{\cos x}\cdot(-2n+2)\cdot\left(\cos^{-2n+2-1}x\right)(-senx)dx =$

$\frac{senx}{\cos^{2n-1}x}-2(n-1)\int\frac{sen^2 x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^{2n-1}x}dx = \frac{senx}{\cos^{2n-1}x}-2(n-1)\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^{2n}x}dx =$

$\frac{senx}{\cos^{2n-1}x}-2(n-1)\int\frac{1}{\cos^{2n}x}dx + 2(n-1)\int\frac{1}{\cos^{2n-2}x}dx =$

$\frac{senx}{\cos^{2n-1}x}-2(n-1)\cdot I_{2n}+2(n-1)\int\frac{1}{\cos^{2n-2}x}dx$, a questo punto si trasporta al primo membro il termine $-2(n-1)\cdot I_{2n}$ e si ottiene

$$I_{2n}+2(n-1)\cdot I_{2n}=(2n-1)\cdot I_{2n}=\frac{senx}{\cos^{2n-1}x}+2(n-1)\int\frac{1}{\cos^{2n-2}x}dx,$$

da cui la formula ricorsiva

$$I_{2n}=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{senx}{\cos^{2n-1}x}+\frac{2(n-1)}{2n-1}\cdot I_{2(n-1)}$$

Dopo (n-1) passaggi ci si ricondurrà al calcolo dell'integrale I_2, già affrontato.

Esempio

Calcolo dell'integrale $\int\frac{1}{\cos^6 x}dx$.

Elaborazioni

$$\int\frac{1}{\cos^6 x}dx=\mathrm{I}_6=\mathrm{I}_{2\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 3-1}\cdot\frac{senx}{\cos^{2\cdot 3-1}x}+\frac{2(3-1)}{2\cdot 3-1}\cdot I_{2(3-1)}=\frac{senx}{5\cos^5 x}+\frac{4}{5}\cdot I_{2\cdot 2}=$$

$$\frac{senx}{5\cos^5 x}+\frac{4}{5}\cdot\left[\frac{1}{2\cdot 2-1}\cdot\frac{senx}{\cos^{2\cdot 2-1}x}+\frac{2(2-1)}{2\cdot 2-1}\cdot I_{2(2-1)}\right]=\frac{senx}{5\cos^5 x}+\frac{4}{15}\cdot\frac{senx}{\cos^{2\cdot 2-1}x}+\frac{8}{15}\cdot I_2=$$

$$\frac{senx}{5\cos^5 x}+\frac{4}{15}\cdot\frac{senx}{\cos^3 x}+\frac{8}{15}\cdot tgx+c$$