Studio della funzione

$$f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2-x}$$

Elaborazioni

1) La funzione è definita nell'insieme A= [0;+∞[-{2} ed è continua in ogni punto del dominio. La frontiera del dominio è l'insieme {0;2;+∞}.
2) La funzione non ammette zeri ed è positiva nell'intervallo [0;2[, negativa nell'intervallo]2;+ ∞[.
3) Limiti nei punti di frontiera
   a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}}{2-x}=f(0)=\frac{1}{2}$, perché nel punto x=0 la funzione è continua.
   b. $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{e^{\sqrt{x}}}{2-x}=\frac{e^{\sqrt{2}}}{0^+}=e^{\sqrt{2}}\cdot(+\infty)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{e^{\sqrt{x}}}{2-x}=\frac{e^{\sqrt{2}}}{0^-}=e^{\sqrt{2}}\cdot(-\infty)=-\infty$, dunque la retta x=2 è asintoto verticale da destra e da sinistra.
   c. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{2-x}=\frac{+\infty}{-\infty}$, si tratta di una forma indeterminata ma si riconosce immediatamente che il valore del limite è -∞ . Si può giustificare l'affermazione ricordando che l'infinito al denominatore è di ordine uno, mentre quello a numeratore non ha ordine, ma supera qualsiasi ordine r>0 prestabilito. A beneficio del lettore studiamo il limite applicando la regola di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{2-x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{t}\overset{H.}{=}-\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{1}=-\frac{1}{2}\cdot(+\infty)=-\infty$$

A questo punto possiamo affermare che il diagramma della funzione per x→+∞ non ammette asintoto orizzontale; proviamo che non ammette neanche asintoto obliquo[1].

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{(2-x)x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{2x-x^2}$. Posto $\sqrt{x}=t$, si studia il limite corrispondente applicando ancora la regola di de l'Hôpital. Risulta

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{2t^2-t^4}\overset{H.}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{4t-4t^3}\overset{H.}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{4-12t^2}\overset{H.}{=}...=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{-24}=-\infty$$

Concludiamo che il diagramma della funzione per x→+∞ non ammette neanche asintoto obliquo.

N.B. Abbiamo già precisato che nel punto x=2 la funzione non è definita; tuttavia, essendo lo stesso un punto di frontiera, considerando i valori ottenuti per i limiti laterali per $x\to 2^-$, $x\to 2^+$, si è soliti affermare che il punto x=2 è di discontinuità di seconda specie per la funzione.

---

[1] La giustificazione di questa proprietà è implicita nell'affermazione fatta sopra circa il tipo di infinito della funzione esponenziale $e^{\sqrt{x}}$.

4) Monotonia, massimi e minimi relativi

Determiniamo la funzione derivata prima e studiamone il segno e gli eventuali zeri.

$$f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{(2-x)^2}\left(\frac{2-x}{2\sqrt{x}}+1\right)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(2-x)^2}\left(2-x+2\sqrt{x}\right)$$

Osserviamo che la derivata prima esiste in ogni punto del dominio con esclusione del punto x=0. Più avanti cercheremo i dettagli sulla modalità con cui il diagramma della funzione tende al punto (0;f(0)).

Segno e zeri della derivata prima

$f'(x)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2-x+2\sqrt{x}\geq 0$, che diventa $2\sqrt{x}\geq x-2$.

La disequazione è equivalente all'unione dei due sistemi

a) $\begin{cases} x\geq 0 \\ x-2<0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x-2\geq 0 \\ 4x\geq (x-2)^2 \end{cases}$

Il primo sistema è soddisfatto per 0≤x<2, ma si deve escludere x=0 perché in tale punto non esiste la derivata prima. Il secondo sistema diventa

$\begin{cases} x\geq 2 \\ x^2-8x+4\leq 0 \end{cases}$ ed è soddisfatto per $2\leq x\leq 4+2\sqrt{3}$.

Tenendo conto del dominio di definizione della funzione si deve escludere il punto x=2.

Concludiamo che

$f'(x)>0$ per $(0<x<2)\vee\left(2<x<4+2\sqrt{3}\right)$;

$f'(x)<0$ per $x>4+2\sqrt{3}$;

$f'(x)=0$ per $x=4+2\sqrt{3}$

La funzione è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli]0;2[, $\left]2;4+2\sqrt{3}\right[$, strettamente decrescente nell'intervallo $\left]4+2\sqrt{3};+\infty\right[$ ed ammette un massimo relativo proprio in $x=4+2\sqrt{3}\approx 2,732$ risultando $f\left(4+2\sqrt{3}\right)\approx -2,812$.

Comportamento del diagramma per x→0⁺

Lo studio del limite della funzione derivata prima permette di ottenere informazioni più dettagliate sull'andamento del diagramma della funzione in un intorno destro del punto x=0. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(2-x)^2}\left(2-x+2\sqrt{x}\right)=\frac{e^0}{0^+}\cdot(2)=+\infty$$

Il risultato ottenuto indica che il diagramma della funzione è tangente all’asse delle ordinate nel punto (0;f(0))=(0;1/2); questa informazione, unita alla monotonia e al valore del limite per $x\to 2^-$, permettono di concludere che il diagramma deve presentare almeno un punto di flesso nell’intervallo [0;2[. Trovando la funzione derivata seconda si riscontra che effettivamente nell’intervallo indicato esiste un punto di flesso avente ascissa x≈0,18 con f(0,18)≈0,84.

Segue il diagramma della funzione.

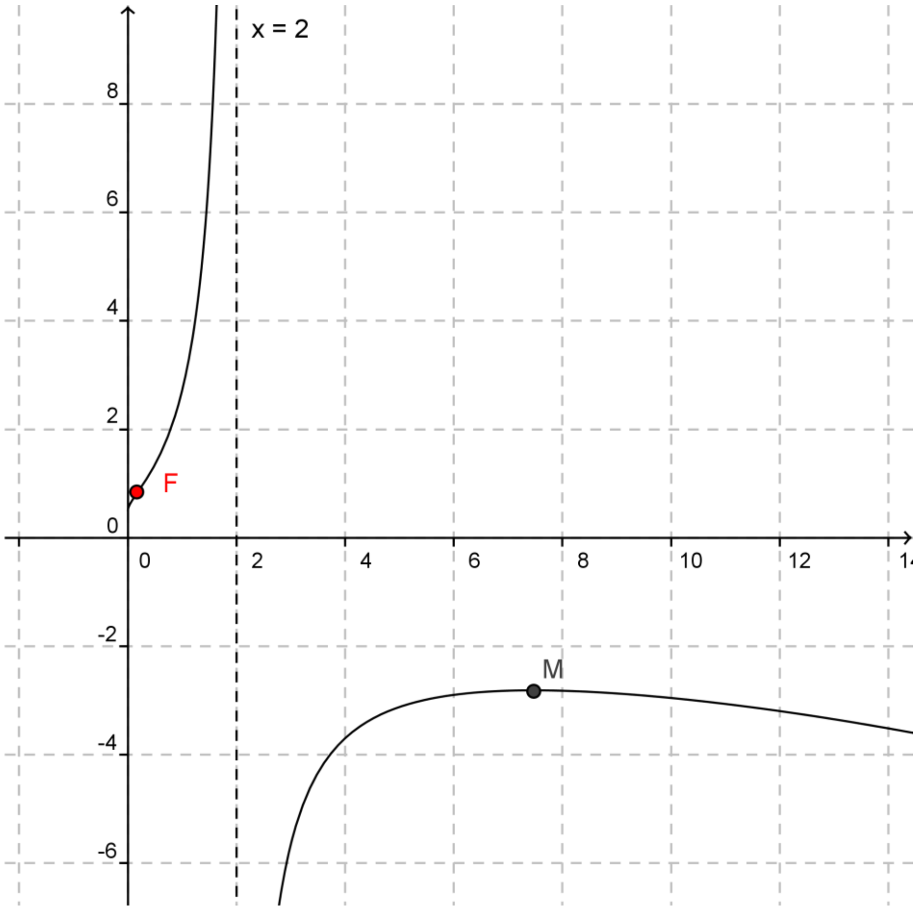

Figura 1-Sul diagramma sono indicati il punto di massimo relativo M(2,732;-2,812)

ed il punto di flesso F(0,18;0,84).