Funzioni di due variabili

Sulla determinazione dei punti di massimo o di minimo relativi o assoluti liberi

Determinare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi o assoluti delle funzioni che seguono nel rispettivo dominio di definizione.

1) $f(x;y) = x^2 + (4-y)^2$

Soluzione

La funzione ha come dominio di definizione R^2 ed è continua e dotata di derivate parziali di qualsiasi ordine in ogni punto del dominio.

Ricerca dei punti critici

I punti critici si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni ottenute uguagliando a zero le derivate parziali prime rispetto a ciascuna delle due variabili.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x^{'} = 2x; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y^{'} = -2(4-y).$$

Il sistema da risolvere è $\begin{cases} 2x = 0 \\ -2(4-y) = 0 \end{cases}$, che ammette come unica soluzione la coppia (x=0;y=4).

La funzione presenta dunque il solo punto critico P(0;4).

Per stabilire se in P la funzione ammette un massimo o un minimo si determinano le derivate parziali del secondo ordine, da calcolare nel punto P, quindi si calcola il valore dell'Hessiano H(x;y) nello stesso punto. Si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}^{''} = 2; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}^{''} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}^{''} = 2.$$

Osserviamo che le derivate parziali seconde sono indipendenti dalle variabili, dunque anche l'Hessiano assume lo stesso valore in ogni punto

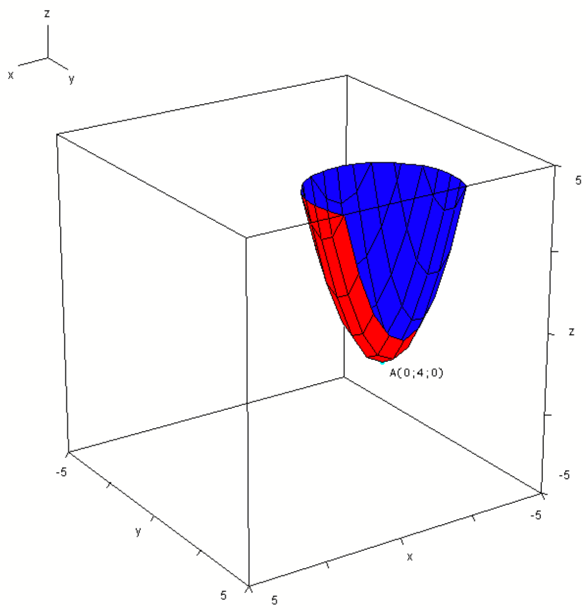


Figura 1- In figura è rappresentata parzialmente la superficie avente equazione z=f(x;y) ed è evidenziato il punto di minimo assoluto A(0;4;0).

del dominio della funzione. Prima di scrivere l'espressione dell'Hessiano ricordiamo che se una funzione (in questo caso in due variabili) è dotata di derivate parziali seconde miste continue allora calcolate in uno stesso punto assumono lo stesso valore (teorema di Schwarz); in simboli si ha $f''_{xy}(P) = f''_{yx}(P)$.

Ciò premesso risulta:

$$H(0;4) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 .$$

Poiché $f''_{xx}(0;4) = 2 > 0$, si deduce che il punto P(0;4) è di minimo relativo per la funzione,anzi, visto che $f(x;y) = x^2 + (4-y)^2 > 0$ in ogni punto (x;y) diverso da (0;4) e che $f(0;4) = 0$, in detto punto la funzione assume il suo minimo assoluto.

*** ***

2) $f(x;y) = x^2 - 4xy + y$

Soluzione

La funzione ha come dominio di definizione R^2 ed è continua e dotata di derivate parziali di qualsiasi ordine in ogni punto del dominio.

Ricerca dei punti critici

Determiniamo le derivate parziali prime f'_x, f'_y e risolviamo il sistema $[f'_x = 0; f'_y = 0]$.

$\begin{cases} f'_x = 2x - 4y = 0 \\ f'_y = -4x + 1 = 0 \end{cases}$, la cui unica soluzione è

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{1}{8} \end{cases}.$$

Classificazione del punto $P\left(\frac{1}{4};\frac{1}{8}\right)$ tramite l'Hessiano.

$f''_{xx} = 2$, $\quad f''_{xy} = -4$, $\quad f''_{yy} = 0$.

Le derivate parziali seconde sono costanti e dunque lo sarà anche l'Hessiano. Risulta:

$$H\left(\frac{1}{4};\frac{1}{8}\right) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

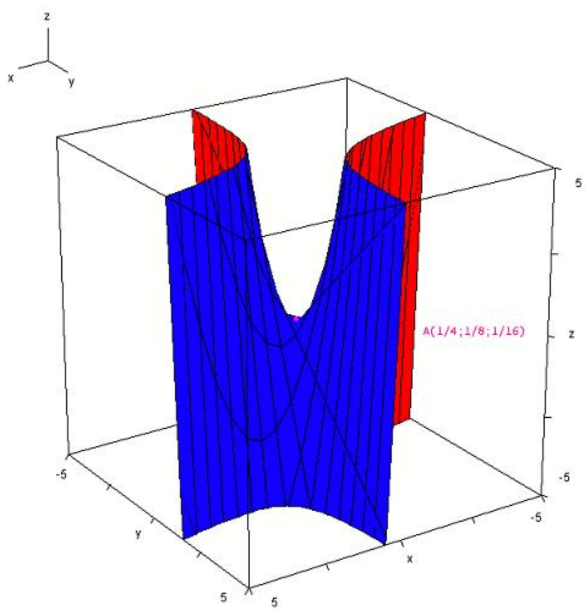


Figura 2- In figura è rappresentata parzialmente la superficie avente equazione $z=x^2-4xy+y$ ed è evidenziato(in colore fucsia) il punto critico A(1/4;1/8;1/16) che non è né di massimo, né di minimo.

Si conclude che il punto $P\left(\frac{1}{4};\frac{1}{8}\right)$ non è né di massimo, né di minimo.

*** ***

3) $f(x;y)=\sqrt{8-2x^2-y^2}$

Soluzione

La funzione è definita per tutti i punti (x;y) che verificano la disuguaglianza $8-2x^2-y^2 \geq 0$; i punti sono quelli appartenenti all'ellisse $\gamma: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$ e quelli interni alla stessa. Il dominio è chiuso e limitato e poiché la funzione è continua per il teorema di Weierstrass ammette sia massimo che minimo assoluti. Possiamo già anticipare che i punti dell'ellisse γ sono di minimo assoluto, giacché la funzione assume valori non negativi in tutto il dominio e si annulla solo sui punti dell'ellisse.

Ricerca dei punti critici

Determiniamo le derivate parziali prime $f_x^{'}$, $f_y^{'}$ e risolviamo il sistema $\left[f_x^{'}=0;\ f_y^{'}=0\right]$.

$$f_x^{'}=\frac{-2x}{\sqrt{8-2x^2-y^2}}; \qquad f_y^{'}=\frac{-x}{\sqrt{8-2x^2-y^2}}$$

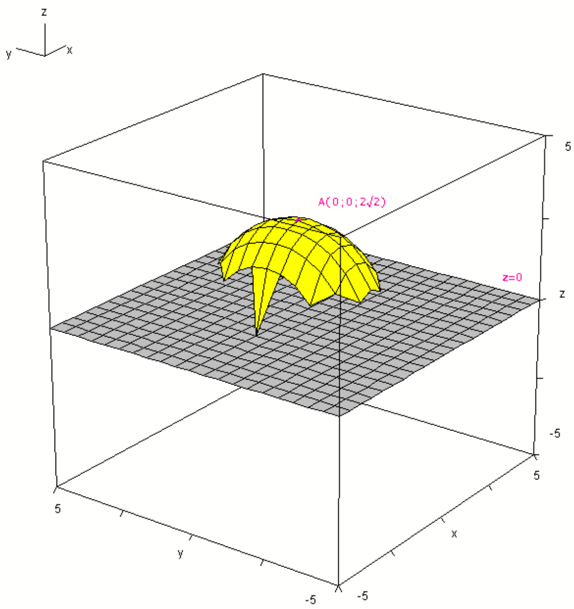
L'unico punto critico è l'origine O(0;0) in cui la funzione assume il valore $f(0;0)=2\sqrt{2}$.

Classificazione del punto (0;0)

Osserviamo che il punto è interno al dominio di definizione della funzione e che per ogni coppia (x;y) del dominio diversa da (0;0) risulta

$$f(x;y)=\sqrt{8-\left(2x^2+y^2\right)}<$$
$$\sqrt{8}=2\sqrt{2}=f(0;0);$$

dalla definizione di punto di massimo, si conclude immediatamente che la funzione assume in (0;0) il suo massimo assoluto. Questa conclusione è immediata e non necessita che si ricorra allo studio dell'Hessiano. Si invita il lettore ad esercitarsi nella determinazione delle derivate seconde, a calcolarle nel suddetto punto e riscontrare che sono verificate le condizioni che giustificano la proprietà dichiarata per il punto (0;0). Risulta:



$$f''_{xx} = \frac{y^2 - 8}{\left(8 - 2x^2 - y^2\right)^{3/2}}\ ;\ f''_{xx}(0;0) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

*** ***

4) $f(x;y) = x^3 - y^3 - x + y$

Soluzione

La funzione è definita per tutti i punti (x;y) di R^2 ed è continua e dotata di derivate parziali di qualsiasi ordine in ogni punto del dominio.

Ricerca dei punti critici

I punti critici si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni ottenute uguagliando a zero le derivate parziali prime rispetto a ciascuna delle due variabili.

$f'_x = 3x^2 - 1$; $\qquad f'_y = -3y^2 + 1$.

Il sistema

$\begin{cases} 3x^2 - 1 = 0 \\ -3y^2 + 1 = 0 \end{cases}$ ammette le seguenti quattro soluzioni $\left(x = \frac{1}{\sqrt{3}}; y = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(x = \frac{1}{\sqrt{3}}; y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(x = -\frac{1}{\sqrt{3}}; y = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(x = -\frac{1}{\sqrt{3}}; y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Classificazione dei punti $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Derivate parziali seconde: $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = -6y$.

Valori dell'Hessiano nei singoli punti:

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} \end{vmatrix} = -12 < 0$$

Conclusione: il punto $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ non è né di massimo, né di minimo relativo.

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = 12 > 0$$

Conclusione: il punto $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ è di minimo relativo proprio.

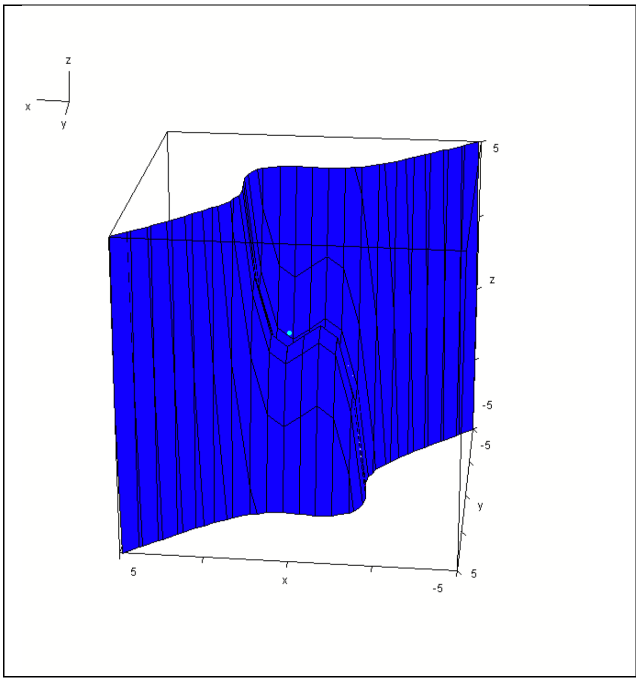
$$H\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\begin{vmatrix}-2\sqrt{3} & 0\\ 0 & -2\sqrt{3}\end{vmatrix}=12>0$$

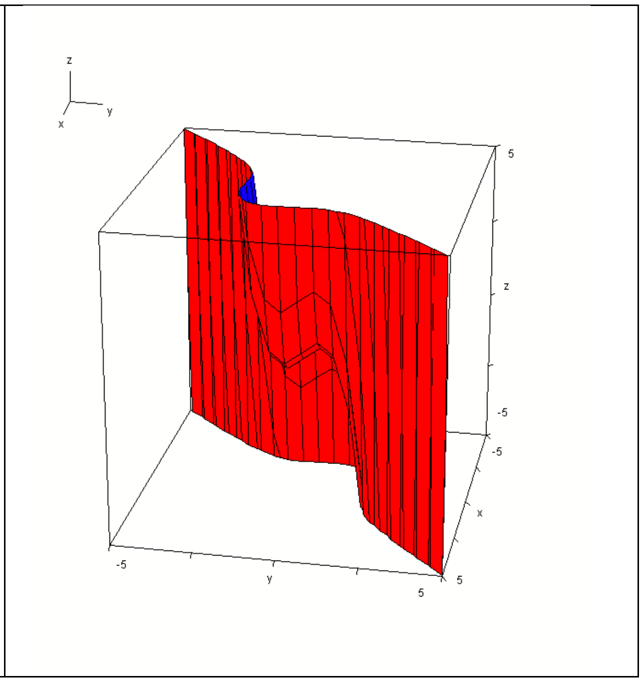
Conclusione:il punto $P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ è di massimo relativo proprio.

$$H\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\begin{vmatrix}-2\sqrt{3} & 0\\ 0 & 2\sqrt{3}\end{vmatrix}=-12<0$$

Conclusione: il punto $P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ non è né di massimo, né di minimo relativo.

Riportiamo due immagini diverse della superficie avente equazione $z=x^3-y^3-x+y$.

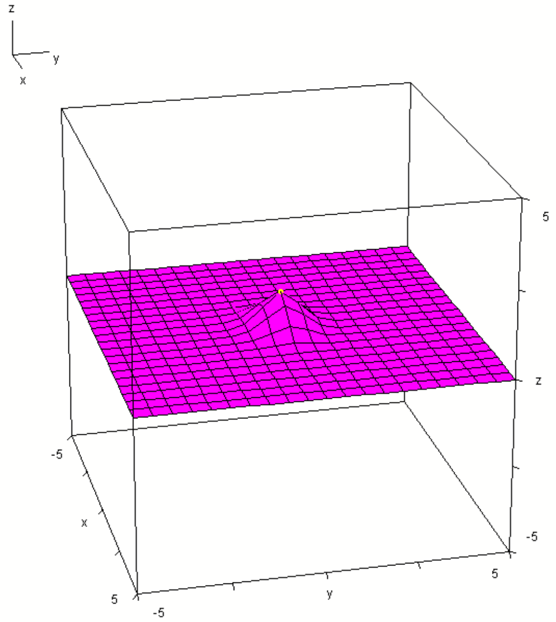




*** ***

5) $f(x;y)=e^{-x^2-2y^2}$

Risposta: (0;0) è punto di massimo assoluto con f(0;0)=1



6) $f(x;y)=x^3-x^2y+xy-y^2$

Risposte

a) Punti critici (0;0), (-1;-1), (-1/2;-3/8).

b) (0;0) e (-1;-1) non sono né di massimo, né di minimo;

c) (-1/2;-3/8) è punto di massimo relativo.