# Studio di funzione

Studiare la funzione $f(x)=\dfrac{1-2\log x}{x\log x}$

## Elaborazioni

### 1) Classificazione e dominio di definizione

Si tratta di una funzione logaritmica fratta (trascendente). Il simbolo log*x* rappresenta il logaritmo naturale di *x*.

La funzione è definita per i valori reali di *x* positivi che non annullano il denominatore, dunque per *x*>0 e *x*≠1. Il dominio di definizione è A=]0;1[∪]1;+∞[.

### 2) Segno e zeri

Si deve studiare la disequazione *f*(*x*)≥0.

Osserviamo che

$N(x)=1-2\log x\geq 0$ diventa $\log x\leq\dfrac{1}{2}$, soddisfatta per $0<x\leq\sqrt{e}$ ;

$D(x)=x\log x>0$, essendo *x*>0 nel dominio, la disequazione è equivalente alla seguente $\log x>0$ , soddisfatta per $x>1$.

Dal confronto dei segni del numeratore e del denominatore si deduce che

$f(x)>0$ per $\left(1<x<\sqrt{e}\right)$; $f(x)<0$ per $\left(0<x<1\right)\vee\left(x>\sqrt{e}\right)$; $f(x)=0$ per $x=\sqrt{e}$.

### 3) Continuità, limiti e asintoti, estremo superiore ed estremo inferiore

La funzione nel suo dominio di definizione è continua. I limiti da studiare sono quelli nei punti di frontiera. La frontiera del dominio di definizione è $Fr\left(A\right)=\left\{0;1;+\infty\right\}$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-2\log x}{x\log x} \tag{3.1}$$

Ricordiamo che sussiste il **limite notevole**

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^r\log x=0^-$ , $\forall r>0$, dunque risulta $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log x=0^-$.

Inoltre, dalle proprietà della funzione logaritmica $y=\log_a x$, con a>1, sappiamo che $\lim\limits_{x\to 0^+}\log x=-\infty$.

Pertanto il limite in esame si presenta della forma ∞/0.

Tenendo presente che per 0<*x*<1 risulta *x*log*x*<0, per il limite in esame possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-2\log x}{x\log x}=\frac{1-2(-\infty)}{0^-}=\frac{+\infty}{0^-}=+\infty\cdot(-\infty)=-\infty$$

Si conclude che **l'asse delle ordinate è asintoto verticale da destra** per il diagramma della funzione.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-2\log x}{x\log x}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0} \qquad (3.2)$$

Occorre esaminare i limiti laterali.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-2\log x}{x\log x}=\frac{1-2\log 1}{1\cdot 0^+}=\frac{1}{0^+}=1\cdot(+\infty)=+\infty\,; \qquad (3.2.1)$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-2\log x}{x\log x}=\frac{1-2\log 1}{1\cdot 0^-}=\frac{1}{0^-}=1\cdot(-\infty)=-\infty\,. \qquad (3.2.2)$$

Poiché i valori dei due limiti laterali sono diversi (e infiniti) si conclude che il limite (3.2) non esiste. La retta ***x*=1 è asintoto verticale** da destra e da sinistra per il grafico della funzione.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1-2\log x}{x\log x}=\frac{1-2(+\infty)}{(+\infty)(+\infty)}=\frac{-\infty}{+\infty} \qquad (3.3)$$

Si tratta di una forma indeterminata che si può studiare velocemente decomponendo l'espressione della funzione nella somma di due frazioni come segue

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1-2\log x}{x\log x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x\log x}-\frac{2\log x}{x\log x}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x\log x}-\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{+\infty}-\frac{2}{+\infty}=0-0=0$$

Avendo ottenuto un valore finito si conclude che la retta **y=0**, cioè l'asse delle ascisse, è **asintoto orizzontale** per $x\to+\infty$.

Il diagramma della funzione non ha altri asintoti oltre alle tre rette indicate.

**Estremi della funzione e continuità**

Abbiamo già precisato che la funzione è continua in ogni punto del suo dominio. Per quanto concerne i punti $x$=0, $x$=1, sebbene gli stessi non appartengano al dominio di definizione, i valori ottenuti nello studio del limite per $x\to 0^+$ e dei limiti laterali per $x\to 1$, permettono di affermare che detti punti sono di **discontinuità di seconda specie**. Inoltre, la funzione non è limitata, né inferiormente, né superiormente e risulta Inf($f$)=-∞, Sup($f$)=+ ∞.

4) Monotonìa e ricerca degli eventuali punti di massimo o di minimo relativo

L'espressione della funzione derivata prima è

$$f'(x)=\frac{2\log^2 x-\log x-1}{x^2\log^2 x}$$

Osserviamo che la funzione in esame è derivabile in ogni punto del suo dominio di definizione. Infatti, la funzione derivata prima ha lo stesso dominio di definizione della funzione $y = f(x)$.

Occorre studiare la disequazione $f'(x) \geq 0$.

Poiché il denominatore nel dominio di definizione della funzione è positivo, la disequazione indicata è equivalente alla seguente

$$2\log^2 x - \log x - 1 \geq 0 \qquad (4)$$

Consideriamo l'equazione associata alla (4)

$$2\log^2 x - \log x - 1 = 0 \qquad (4.1)$$

L'equazione è soddisfatta se $\log x = \frac{1 \pm 3}{4}$, quindi se $\log x = -\frac{1}{2}$, cioè per $x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$, oppure

se $\log x = 1$, quindi per $x = e$.

La disequazione (4) è soddisfatta dai valori di $x$ tali che $\left(\log x \leq -\frac{1}{2}\right) \vee (\log x \geq 1)$, quindi per i valori $\left(0 < x \leq e^{-\frac{1}{2}}\right) \vee (x \geq e)$.

**Conclusioni**

In ciascuno degli intervalli $\left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right[$, $]e; +\infty[$, la funzione derivata prima è positiva e quindi la funzione $y = f(x)$ è strettamente crescente.

In ciascuno degli intervalli $\left]e^{-\frac{1}{2}}; 1\right[$, $]1; e[$, la funzione derivata prima è negativa, quindi la funzione $y = f(x)$ è strettamente decrescente.

Il punto $x = e^{-\frac{1}{2}}$ è di massimo relativo proprio, con $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -4\sqrt{e}$; il punto $x = e$ è di minimo relativo proprio, con $f(e) = -\frac{1}{e}$.

5) Concavità, convessità e flessi

L'espressione della derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{-4\log^3 x + 2\log^2 x + 3\log x + 2}{x^3 \log^3 x}$$

Per stabilire se la funzione ammette punti di flesso occorre determinare gli eventuali zeri dell'equazione logaritmica

$$-4\log^3 x+2\log^2 x+3\log x+2=0. \qquad (5)$$

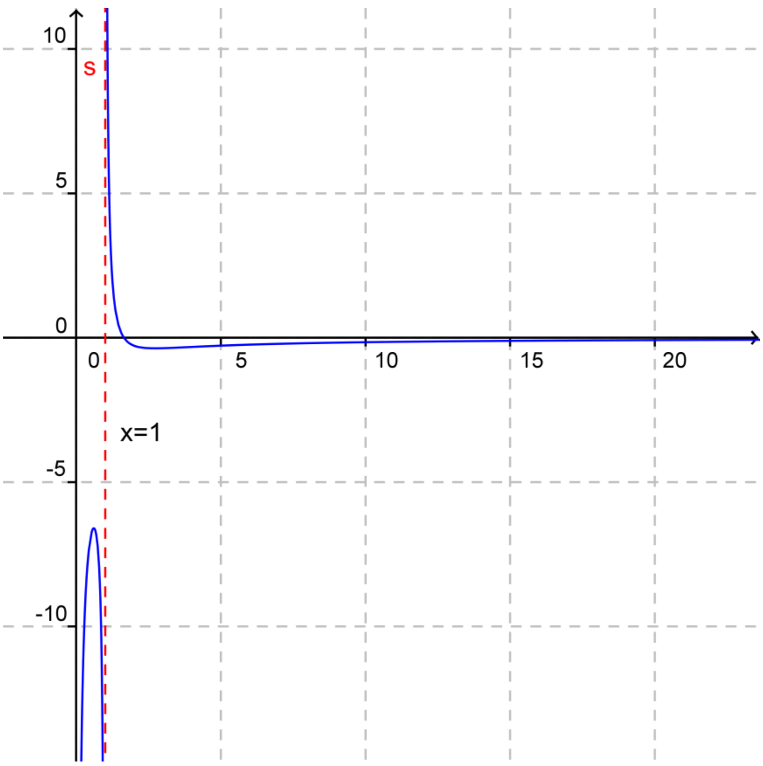
Con log$x$=$t$, l'equazione da studiare è

$$P(t)=-4t^3+2t^2+3t+2=0 \qquad (5.1)$$

L'equazione (5.1), avendo grado dispari, nel campo reale ammette almeno una radice t=α. Con uno studio accurato si riconosce che detta equazione ammette una sola radice reale ed altre due che sono complesse. Al fine di avere un'idea sul valore di α, si osservi che $P(1)=3>0$, $P(2)=-18<0$ e quindi risulta 1<α<2. Si può ottenere un'approssimazione migliore per α osservando che $P\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{2}<0$ e quindi che sussiste la limitazione $1<\alpha<\frac{3}{2}$. Il lettore che lo desidera può continuare la ricerca calcolando il polinomio P($t$) nel punto medio dell'ultimo intervallo individuato contenente α e ricavare una limitazione ancora migliore per α; nel momento in cui deciderà di arrestare la ricerca, potrà assumere per α un valore qualsiasi dell'intervallo in cui il punto ricade; generalmente si sceglie il punto medio dello stesso intervallo [(1)]. Per i calcoli che noi abbiamo sviluppato, assumiamo

$\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{4}$ e quindi il valore corrispondente per $x$ nell'equazione (5) è quello per cui si verifica

$\log x=\alpha$, quindi $x=e^{\frac{5}{4}}\approx 3,49$




Concludiamo questa ricerca affermando che **la funzione in esame ammette un solo punto di flesso**, approssimativamente in $x$=3,49 e che il suo grafico volge la concavità verso l'alto (la funzione è convessa) nei punti del dominio $x$<3,49, e volge la concavità verso il basso (la funzione è concava) per $x$>3,49.

**Osservazione**

Un'indagine più accurata fornisce α≈1,34 e quindi il valore $x=e^{1,34}\approx 3,82$ per l'ascissa del punto di flesso.

(1) Il metodo di ricerca qui seguito è noto come "metodo di bisezione o dicotomico" per la ricerca delle radici di un'equazione nel campo reale.