

Studio di funzioni

Studio della funzione $f(x) = xe^{-x}$

- 1) Dominio e proprietà generali- La funzione è definita su tutto l'asse reale, è continua ed ammette derivate di qualsiasi ordine.
- 2) Segno e zeri- La funzione si annulla solo per $x=0$, è positiva per $x>0$ ed è negativa per $x<0$.
- 3) Limiti ed eventuali asintoti.

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \infty \cdot 0$ Si può studiare la forma indeterminata riconducendola alla forma ∞/∞ ed applicando la regola di De l'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0^+ \quad \text{L'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per } x \rightarrow +\infty$$

- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty \cdot +\infty = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

Per $x \rightarrow -\infty$ il diagramma della funzione non ammette alcun asintoto.

- 4) Monotonia, massimi e minimi relativi e assoluti
 - a. Notiamo subito che $\text{Inf}(f)=-\infty$, quindi **la funzione non ammette minimo assoluto**.
 - b. $f'(x) = e^{-x} (1-x)$. $f'(x) = 0$ per $x=1$. Poiché risulta $f'(x) > 0$ per $x < 1$ e $f'(x) < 0$ per $x > 1$, si deduce che la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $]-\infty; 1[$, strettamente decrescente nell'intervallo $]1; +\infty[$ ed il punto $x=1$ è di massimo assoluto: $f(1) = e^{-1} \simeq 0,368$.
 - c. La funzione non ammette punti di minimo relativo.

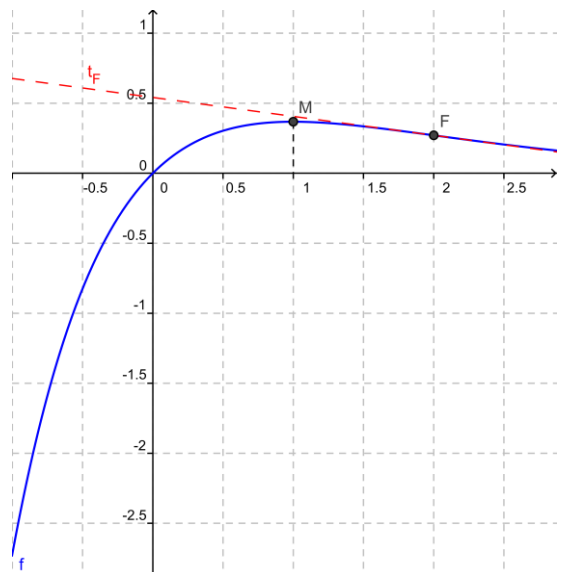
5) Concavità e flessi

- a. $f''(x) = e^{-x} (x-2)$

$f''(x) < 0$, per $x < 2$; in $]-\infty; 2[$ la curva volge la concavità verso il basso (è concava);

$f''(x) > 0$, per $x > 2$; in $]2; +\infty[$ la curva volge la concavità verso l'alto (è convessa);

$f''(x) = 0$, per $x=2$. Il punto $x=2$ è di flesso ascendente; $y_F = f(2) = 2e^{-2} \simeq 0,271$.



Equazione della tangente inflessionale:

$$t_F : y - f(2) = f'(2)(x - 2) \rightarrow t_F : y = e^{-2}(4 - x)$$

Studio del la funzione $f(x) = x^2 e^{1-x}$

- 1) Dominio e proprietà generali- La funzione è definita su tutto l'asse reale, è continua ed ammette derivate di qualsiasi ordine.
- 2) Segno e zeri- La funzione si annulla solo per $x=0$ ed è positiva negli altri punti.
- 3) Limiti ed eventuali asintoti.

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{1-x} = \infty \cdot 0$ Si può studiare la forma indeterminata riconducendola alla forma ∞/∞ ed applicando la regola di De l'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x-1}} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0^+$$

L'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$

- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{1-x} = +\infty \cdot +\infty = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x} = -\infty$$

Per $x \rightarrow -\infty$ il diagramma della funzione non ammette alcun asintoto.

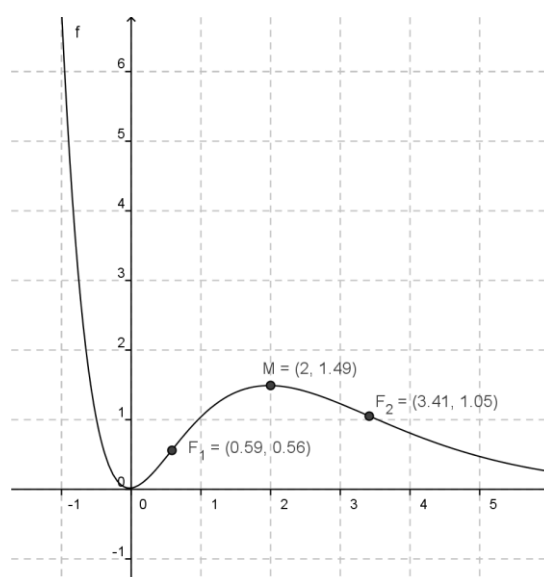
4) Monotonia, massimi e minimi relativi e assoluti

- a. Notiamo subito che la funzione assume in $x=0$ il suo **minimo assoluto**, che vale zero, mentre $\text{Sup}f = +\infty$, quindi la funzione non ammette massimo assoluto.

- b. $f'(x) = 2x e^{1-x} + x^2 e^{1-x}(-1) = e^{1-x} (2x - x^2)$

$f'(x) = 0$ per $x = 0 \vee x = 2$. Poiché risulta $f'(x) > 0$ per $0 < x < 2$ e $f'(x) < 0$ per $x < 0$ oppure per $x > 2$, deduciamo che $x=0$ è punto di minimo relativo proprio (avevamo già precisato che in esso la funzione assume anche il minimo assoluto) e $x=2$ è di massimo relativo proprio con $f(2) = 4e^{-1}$. La funzione è strettamente crescente nell'intervallo $]0;2[$, è strettamente decrescente in ciascuno dei due intervalli $]-\infty;0[$, $]2;+\infty[$.

5) Concavità e flessi



a. $f''(x) = e^{1-x} - 1 - 2x - x^2 + e^{1-x} - 2 - 2x = e^{1-x} - x^2 - 4x + 2$

Osserviamo che $x^2 - 4x + 2 = 0$ per $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

$$f''(x) > 0 \quad \text{per} \quad x < 2 - \sqrt{2} \vee x > 2 + \sqrt{2} ;$$

in ciascuno dei due intervalli il diagramma della funzione volge la concavità verso l'alto;

$f''(x) < 0$ per $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$; nell'intervallo indicato il diagramma della funzione volge la concavità verso il basso.

Nel punto $F_1(2 - \sqrt{2}; f(2 - \sqrt{2}))$ vi è un flesso discendente; nel punto

$F_2(2 + \sqrt{2}; f(2 + \sqrt{2}))$ vi è un flesso ascendente.

Operatività con [GeoGebra](#)

Dopo aver inserito l'equazione della funzione con la formula $y = x^2 e^{(1-x)}$, l'applicazione assegna un nome alla funzione, per esempio $f(x)$, e compare nel pannello dei dati l'espressione: $f(x) = x^2 e^{(1-x)}$.

Per inserire le coordinate del punto $M(2; f(2))$ di massimo relativo si può scrivere nella barra della formula: $(2, f(2))$; una volta visualizzato il punto sul diagramma lo si può rinominare.

Per visualizzare i due punti di flesso:

digitare $(2 - \sqrt{2}, f(2 - \sqrt{2}))$, per F_1 ;

digitare: $(2 + \sqrt{2}, f(2 + \sqrt{2}))$, Per F_2 .

