

Studio di funzione razionale fratta

⁽¹⁾Es_3 (Studio di funzione)

Q1- Considerata la funzione $y = x - \frac{k}{x^2}$, determinare il valore del parametro k in modo che la funzione abbia nel punto $x=-1$ un punto stazionario.

Q2- Studiare la funzione ottenuta nel precedente quesito, precisando il dominio, il segno e gli eventuali zeri, le equazioni degli asintoti, la concavità e la convessità. Rappresentare il suo diagramma.

Soluzione

Q1- Dalla definizione di punto stazionario deduciamo che la condizione assegnata per la funzione indica che nel punto $x=-1$ si deve annullare la derivata prima; determiniamo perciò $f'(x)$ ed imponiamo che si annulli nel punto indicato.

$$f(x) = x - \frac{k}{x^2} \rightarrow f'(x) = 1 + \frac{2k}{x^3}; f'(-1) = 1 - 2k = 0 \rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

La funzione da studiare è $f(x) = x - \frac{1}{2x^2}$

Q2- Studio della funzione

a) La funzione è definita in $A = R_0 = R - \{0\}$

b) Segno e zeri

$$f(x) \geq 0 \rightarrow \frac{2x^3 - 1}{2x^2} \geq 0 \quad \text{La funzione si annulla solo nel punto } x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \text{ è positiva per } x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

e negativa per $x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \wedge x \neq 0$.

c) Limiti nei punti di frontiera ed asintoti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{1}{2x^2} \right) = -\infty \quad \text{L'asse delle } y \text{ è asintoto}$$

verticale sia da destra, sia da sinistra.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{2x^2} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{2x^2} \right) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x^3} \right) = 1 = m;$$

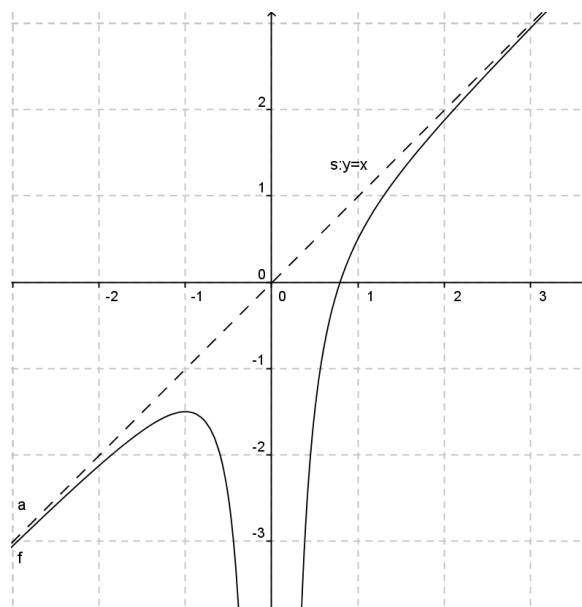
$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) = 0.$$

La retta $s: y = x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$.

Si riconosce che la stessa retta è anche asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

Notiamo che il codominio della funzione non è limitato né superiormente, né inferiormente:

$\text{Sup}(f) = +\infty, \text{Inf}(f) = -\infty$.



¹ Problema assegnato in una classe quinta: M6_5I-14-04-11



d) Monotonia, massimi e minimi relativi

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^3} = \frac{x^3 + 1}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \text{ solo per } x = -1; \quad f'(x) > 0 \text{ per } (x < -1) \vee (x > 0); \quad f'(x) < 0 \text{ per } -1 < x < 0.$$

La funzione è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli $]-\infty; -1[$, $]0; +\infty[$ ed è strettamente decrescente nell'intervallo $] -1; 0[$. Il punto $x = -1$ è di massimo relativo proprio;

$$f(-1) = -\frac{3}{2}.$$

e) Concavità e flessi

$$f''(x) = -\frac{3}{x^4} < 0 \text{ in ogni punto del dominio; il diagramma della funzione volge la concavità}$$

verso il basso in ciascuno punto del dominio e non presenta flessi.

