

Studio veloce di due funzioni

Dominio, positività, zeri, limiti, asintoti, derivabilità, punti di massimo e di minimo relativi o assoluti. Cenni alla concavità ed ai punti di flesso.

1) $f(x) = xe^{1-x}$

a) Dominio- La funzione è definita su tutto l'asse reale ed è continua e derivabile ovunque nel dominio.: $A = \mathbb{R}$

b) Segno e zeri- La funzione si annulla solo per $x=0$, è positiva per $x>0$ ed è negativa per $x<0$.

c) Limiti e asintoti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0 \quad \text{L'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per } x \rightarrow +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{1-x} = -\infty \quad \text{Per } x \rightarrow -\infty \text{ il diagramma della funzione non ammette asintoto orizzontale.}$$

Proviamo che non ammette neanche asintoto obliquo.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty \quad (\text{C.V.D.})$$

d) Derivabilità, monotonia; punti di massimo e di minimo relativi o assoluti

Abbiamo già precisato che la funzione è derivabile sin ogni punto del dominio. Risulta:

$$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{per } x=1; \quad f'(x) > 0 \quad \text{per } x < 1; \quad f'(x) < 0 \quad \text{per } x > 1.$$

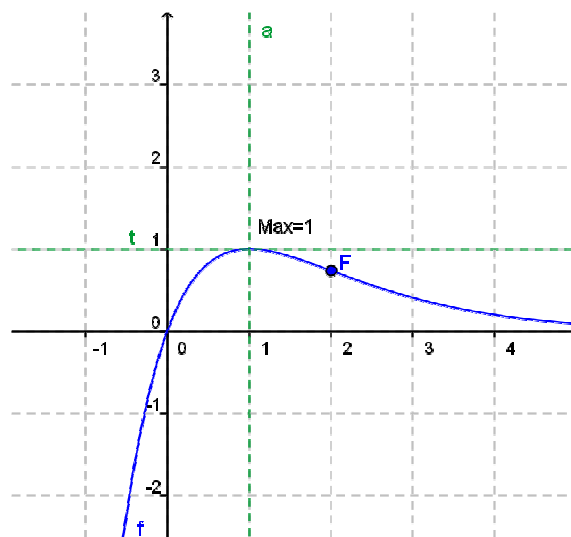
La funzione ammette in $x=1$ un massimo relativo proprio che è anche assoluto; non ammette invece punti di minimo relativo proprio, né di minimo assoluto. $\inf(f) = -\infty$.

e) La funzione derivata seconda è

$$f''(x) = e^{1-x}(x-2). \text{ Risulta:}$$

$$f''(x) = 0, \text{ per } x=2; \quad f''(x) > 0, \text{ per } x > 2;$$

$f''(x) < 0, \text{ per } x < 2$. La funzione è convessa per $x > 2$ e concava per $x < 2$. Nel punto $x=2$ il diagramma della funzione presenta un flesso ascendente: $F(2; 2e^{-1})$.



2) $f(x) = \log\left(\frac{x}{2x+1}\right)$

a) Dominio- La funzione è definita nell'insieme $A = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup]0; +\infty[$.

b) Segno e zeri- La funzione si annulla se l'argomento del logaritmo vale uno, quindi $\frac{x}{2x+1} = 1$
 $\rightarrow x = -1$.

La funzione è positiva nell'intervallo $\left]-1; -\frac{1}{2}\right[$ ed è negativa per negli altri punti del suo dominio..

c) Limiti e asintoti.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow$$

La retta $s: y = -\log 2$ è asintoto orizzontale per il diagramma, sia per $x \rightarrow +\infty$, che per $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log\left(\frac{x}{2x+1}\right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \log\left(\frac{x}{2x+1}\right) = +\infty \quad \rightarrow$$

L'asse delle ordinate è asintoto verticale da destra; la retta $a = -\frac{1}{2}$ è asintoto verticale da sinistra.

d) Derivabilità, monotonia; punti di massimo e di minimo relativi o assoluti.

La funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio. Risulta:

$$f'(x) = \frac{1}{x(2x+1)} \text{ e } f'(x) > 0 \text{ in ogni punto del}$$

dominio di definizione della funzione. La funzione è strettamente crescente in ciascuno dei due intervalli

$\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$, $]0; +\infty[$ e non ha punti di massimo, né di minimo relativi o assoluti. $\text{Sup}(f) = \infty$, $\text{Inf}(f) = -\infty$.

