

Studio di funzione e calcolo di aree

1. Considerata la funzione $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, determinare il dominio, studiare il segno, determinare gli eventuali asintoti, precisarne la derivabilità, la monotonia, gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo o assoluti, studiare la concavità e la convessità, trovare i flessi e rappresentarla nel piano cartesiano.
2. Ricontrato che il grafico G della funzione ammette tre punti di flesso, dimostrare che questi sono allineati.
3. Detto F_1 il punto di flesso avente ascissa positiva, scrivere l'equazione della retta t tangente al grafico in F_1 e dimostrare che detta retta non ha con il grafico G altri punti in comune.
4. Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'asse delle ascisse, dal diagramma della curva e dalla retta t .

Soluzione

1. Studio della funzione

- a. Dominio- La funzione è definita su tutto l'asse reale ed è continua in ogni punto del dominio.
- b. Segno e zeri.
 $f(x) > 0, \forall x > -1; f(x) = 0$, solo per $x = -1; f(x) < 0, \forall x < -1$.
- c. Limiti ed eventuali asintoti.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0^+ \quad \rightarrow$$

l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per il diagramma della funzione sia per $x \rightarrow -\infty$, che per $x \rightarrow +\infty$ e non esistono pertanto asintoti obliqui.

- d. Derivabilità, monotonia, massimi e minimi.

$$f'(x) = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2} \quad \text{La funzione è derivabile su tutto l'asse reale, con derivata}$$

continua; addirittura esiste la derivata di qualsiasi ordine continua⁽¹⁾.

$$\frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x^2+2x-1 < 0;$$

la disuguaglianza è soddisfatta nell'intervallo $]-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}[$.

La funzione è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli $]-\infty; -1-\sqrt{2}[$, $]-1+\sqrt{2}; +\infty[$; è strettamente crescente nell'intervallo $]-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}[$.

Il punto $x_1 = -1-\sqrt{2}$ è di minimo assoluto e risulta $f(-1-\sqrt{2}) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Il punto $x_2 = -1+\sqrt{2}$ è di massimo assoluto e risulta $f(-1+\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

- e. Concavità, convessità e flessi.

$$f''(x) = \frac{(-2-2x)(x^2+1)^2 - (1-2x-x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^4}$$

⁽¹⁾ Quindi la funzione è di classe C^∞

Gli zeri della derivata seconda sono: $x' = -2 - \sqrt{3}$, $x'' = -2 + \sqrt{3}$, $x''' = 1$. Inoltre risulta

$f''(x) > 0$, per i valori reali della variabile tali che $-2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$ oppure $x > 1$;

negli altri punti del dominio risulta $f''(x) < 0$.

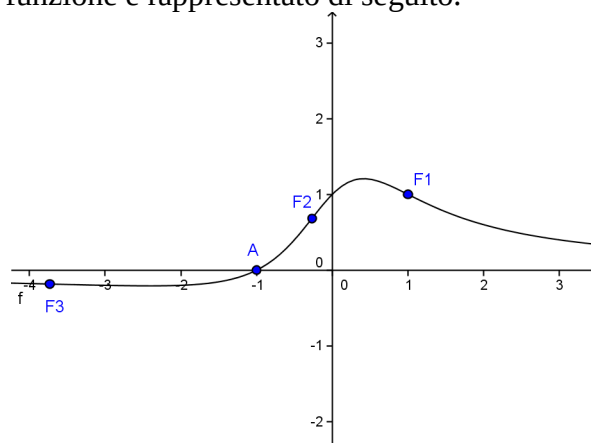
Conclusione

La funzione è convessa, cioè volge la concavità verso l'alto, dove $f''(x) > 0$, è concava, cioè volge la concavità verso il basso, dove $f''(x) < 0$ ed ammette tre punti di flesso le cui ascisse sono $x' = -2 - \sqrt{3}$, $x'' = -2 + \sqrt{3}$, $x''' = 1$. Le ordinate dei punti di flesso sono

$$f(-2 - \sqrt{3}) = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}, f(-2 + \sqrt{3}) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, f(1) = 1.$$

$$\text{Poniamo } F_1(1;1), F_2\left(-2 + \sqrt{3}; \frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right), F_3\left(-2 - \sqrt{3}; \frac{1 - \sqrt{3}}{4}\right)$$

Il diagramma della funzione è rappresentato di seguito.



2. Nello studio della funzione abbiamo già riscontrato che il diagramma ammette i tre punti di flesso F_1 , F_2 , F_3 , dei quali sono state anche determinate le coordinate. Per dimostrare che sono allineati si deve verificare che sussiste la seguente uguaglianza

$$\frac{y_{F_2} - y_{F_3}}{x_{F_2} - x_{F_3}} = \frac{y_{F_1} - y_{F_2}}{x_{F_1} - x_{F_2}}$$

Ebbene, si ha

$$\frac{y_{F_2} - y_{F_3}}{x_{F_2} - x_{F_3}} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}}{4} - \frac{1 - \sqrt{3}}{4}}{-2 + \sqrt{3} - (-2 - \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}}{4 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{y_{F_1} - y_{F_2}}{x_{F_1} - x_{F_2}} = \frac{1 - \frac{1 + \sqrt{3}}{4}}{1 - (-2 + \sqrt{3})} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4(3 - \sqrt{3})} = \frac{1}{4} \quad \text{C.V.D.}$$

3. Ricordiamo che l'equazione della retta tangente al diagramma di una funzione nel punto $(x_0; f(x_0))$, nell'ipotesi che la funzione sia derivabile in x_0 , è
 $t: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$; nel nostro caso l'ipotesi è soddisfatta, per cui l'equazione della retta tangente nel punto di flesso F_1 è:

$$t: y-1 = -\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow t: y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}.$$

Per rispondere alla seconda parte del quesito occorre risolvere il sistema formato con le equazioni della retta tangente e della funzione e dimostrare che tale sistema ammette come soluzione solo la coppia ordinata (1;1).

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \\ y = \frac{x+1}{x^2+1} \end{cases} \rightarrow \frac{x+1}{x^2+1} = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \rightarrow (x-1)^3 = 0 \rightarrow x=1,$$

la radice dell'equazione ha molteplicità tre, cioè va contata tre volte. Concludiamo che il sistema di equazioni ammette come soluzione solo la coppia (x=1;y=1) contata tre volte. C.V.D.

4. Per il calcolo della regione finita di piano indicata, siano A(1;0) il punto di intersezione del diagramma della funzione con l'asse delle ascisse e B il punto di intersezione della retta tangente al grafico in F₁ con lo stesso asse. La regione finita di piano in esame è costituita dall'unione del sottografico della funzione relativo all'intervallo [-1;1] con il triangolo rettangolo avente per base [1;3] e per ipotenusa il segmento [F₁;B]. Il valore dell'area della regione piana è perciò dato da

$$S = S_1 + S_2, \text{ essendo } S_1 = \int_{-1}^1 f(x)dx, S_2 = \frac{1}{2}(x_B - x_{F_1})y_{F_1}.$$

$$S_1 = \int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2+1} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\log(x^2+1)]_{-1}^1 + [\arctg(x)]_{-1}^1 =$$

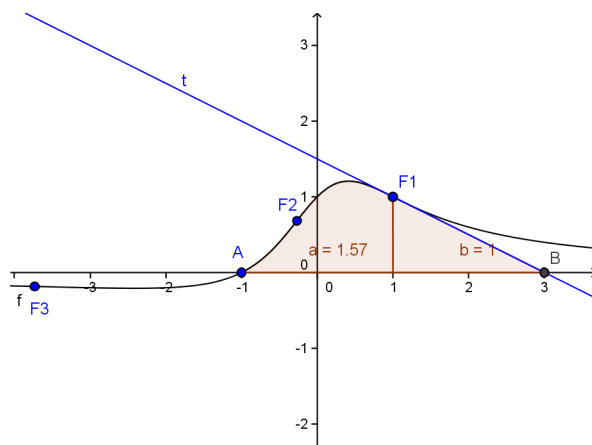
$$\frac{1}{2} [\log 2 - \log 2] + [\arctg(1) - \arctg(-1)] =$$

$$0 + \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{2};$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(x_B - x_{F_1})y_{F_1} = \frac{1}{2} \cdot (3-1) \cdot 1 = 1$$

Conclusione

$$S = \frac{\pi}{2} + 1$$



Per gli utenti di GeoGebra

- a) Per rappresentare il punto $F_2 \left(-2 + \sqrt{3}; \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \right)$ digitare nella barra della formula la

coppia delle coordinate tramite l'espressione **(-2+sqrt(3),(1+sqrt(3))/4).**

- b) Per il calcolo dell'integrale definito della funzione relativo all'intervallo [-1;1] digitare nella barra della formula **Integrale[f(x),-1,1].**

Per il calcolo dell'area del triangolo rettangolo di base [1;3] si può utilizzare ancora GeoGebra (anche se non è il caso, data la semplicità) digitando l'espressione

Integrale[-0.5x+1.5,1,3]

nella quale è stata utilizzata l'espressione della funzione $y = -0.5x + 1.5$, che esprime l'equazione della retta tangente nel punto di flesso F₁.