

Funzione logaritmica

Studiato la funzione di seguito indicata e tracciare il suo diagramma

$$f(x) = \frac{x}{\log x},$$

* * * * *

1) Dominio di definizione

La funzione è definita per i valori positivi reali della variabile reale con esclusione di $x=1$ perché in tale punto si annulla il denominatore. Dunque il dominio è $A =]0; +\infty[- \{1\}$.

2) Simmetrie. Il diagramma della funzione non presenta alcuna simmetria.

3) Segno e zeri

Occorre studiare la disequazione $f(x) \geq 0$ nel dominio di definizione

$$\frac{x}{\log x} \geq 0$$

Dalle caratteristiche del dominio si evince che la funzione non ammette zeri. Infatti il numeratore della frazione è positivo.

La base del logaritmo è il numero $e=2,718...$ di Nepero e dunque il denominatore è positivo per $x>1$. Concludiamo che la funzione è negativa nell'intervallo $]0;1[$ ed è positiva nell'intervallo $]1;+\infty[$.

4) Limiti ed asintoti

La frontiera del dominio è $Fr(A) = \{0;1;+\infty\}$ e vanno studiati i limiti in ciascuno dei punti di tale insieme.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\log x} = \frac{0}{-\infty} = 0^- \quad \text{la retta } x = 0 \text{ è asintoto verticale da destra.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\log x} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\log x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

La retta di equazione $x=1$ è asintoto verticale a destra ed a sinistra.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log x} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{Per } x \rightarrow +\infty \text{ non esiste asintoto orizzontale.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad \text{Per } x \rightarrow +\infty \text{ non esiste neanche asintoto obliquo.}$$

Dai valori ottenuti per i limiti laterali per $x \rightarrow 0$ si deduce che l'estremo inferiore della funzione è $-\infty$ e che l'estremo superiore è $+\infty$.

5) Monotonia, massimi e minimi relativi

$$f'(x) = \frac{\log x - 1}{\log^2 x}$$

Dallo studio della disequazione $f'(x) \geq 0$ si ricava che:

in ciascuno degli intervalli $]0;1[$, $]1;e[$, risulta $f'(x) < 0$, dunque in ciascuno di essi la funzione è strettamente decrescente;

nell'intervallo $]e;+\infty[$ risulta $f'(x) > 0$, dunque quivi la funzione è strettamente crescente; inoltre $f'(e) = 0$.

Il punto $x = e$ è di minimo relativo proprio e si ha $f(e) = e$.

La funzione non ammette punti di massimo relativo proprio.

6) Concavità, convessità e flessi.

$$f''(x) = \frac{2 - \log x}{x \log^3 x}$$

Dallo studio del segno per $f''(x)$ risulta:

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in]0; 1[\cup]e^2; +\infty[;$$

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in]1; e^2[;$$

$$f''(e^2) = 0$$

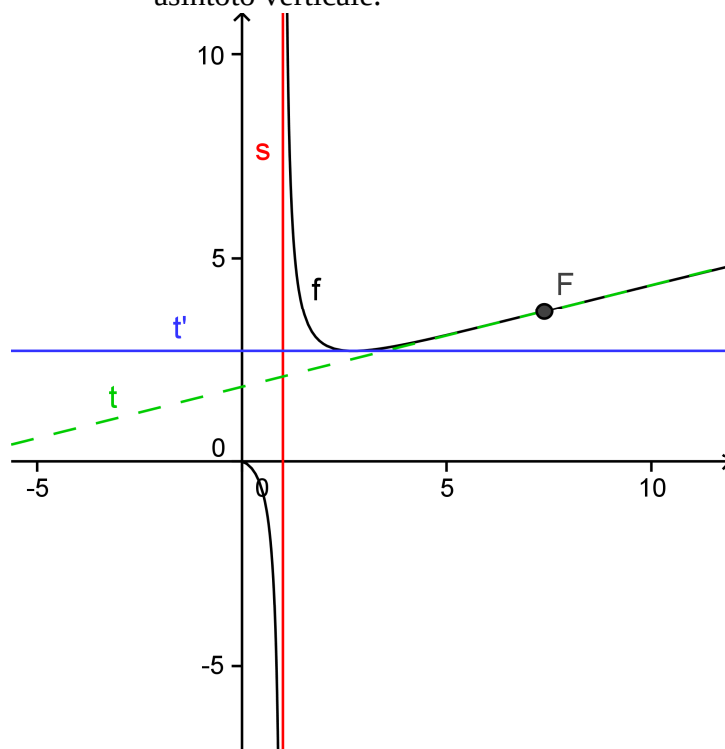
La funzione ammette un punto di flesso per $x = e^2$, è concava in ciascuno degli intervalli $]0; 1[$, $]e^2; +\infty[$ ed è convessa nell'intervallo $]1; e^2[$.

Riportiamo di seguito il diagramma della funzione. In figura abbiamo anche rappresentato:

la retta $t: x + e^2 - 4y = 0$, tangente nel punto di flesso F;

la retta $t': y = e$, tangente al diagramma della funzione nel punto di minimo;

la retta $s: x = 1$, asintoto verticale.



Nota per gli utenti di Geogebra

Il grafico è stato realizzato con Geogebra.